725 重力の影響を考慮に入れた弾性送水管曲管部の面内振動

Dynamics of a Curved Fluid-Conveying Pipe Taking the Gravity Force into Consideration

○ 水成 徹次 (慶大院)
正 山下 清隆 (早大)

正 吉沢 正紹 (慶大)
新谷 智史 (三菱重工)

Tetsuji MIZUNARI, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama

Masatsugu YOSHIZAWA, Keio University

Kiyotaka YAMASHITA, Waseda University

Tomofumi SHINTANI, Mitsubishi Heavy Industry

This paper deals with the static shape and dynamics of a curved fluid-conveying pipe, which is hanging horizontally and is supported at both ends. First, the effects of the gravity force acting on the pipe, the tension at the supported ends and the fluid force of an internal flow on the static equilibrium state of the flexible curved pipe are clarified theoretically. Second, the forced in-plane vibration of the curved pipe due to the pulsating component of an internal flow is examined theoretically. Finally, the experiments were conducted with a silicon rubber tube conveying water.

Key Words: Vibration of Continuous System, Forced Vibration, Vibration Coupled with Fluid Motion

管内流による弾性送水管の振動問題は、流体関連振動の基礎的課題として多くの研究が行われてきた。しかし、弾性送水管の曲管部の振動に関する研究は工業的に重要な問題を含んでいるにもかかわらず、直管部の場合に比べ数少ない。

このような中、著者らは一連の研究において、曲管の空間運動に着目し、その運動を記述する方程式系の誘導を行った。誘導された方程式を元に、管内定常流速が管の固有振動に与える影響を理論的・実験的に調べた。この結果は、Misraらの結果に帰着している。一方、弦やケーブルの振動問題では、重力の影響により発生するたわみが弦やケーブルの不安定現象に時として大きく作用することが報告されている。

本研究では、これらの事を念頭に入れ、従来の鉛直に吊り下げられた真っ直ぐな弾性送水管の方程式系の誘導を参考にしながら、重力の影響を考慮に入れた弾性送水管の曲管部の方程式系を導出する。

次に、重力の影響が曲管部の振動現象に及ぼす影響を明らかにする最初のステップとして、得られた支配方程式から時間変動項を無視し、曲管の静的釣り合い状態を明らかにする。そして、重力が曲管の静的釣り合い状態に及ぼす影響を検証する。その上で、面内強制振動の励振メカニズムに関して理論解析を行う。

さらにシリコンチューブに水を流す実験を行い、定常流速を変化させ、管の固有振動数の測定を行う。また、流速に脈動流成分を付加し、その振動数を変化させることで、曲管の面内振動を実験的に確認する。

本研究で用いる解析モデルを図 A1 に示す。管軸に沿った座標を s とし、鉛直方向変位を $u(s, t)$ 、水平方向変位を $w(s, t)$ 、座標 s での接線方向と鉛直方向とのなす角度を $\theta(s, t)$ とする。また、管内には非圧縮、一次元流れと仮定した密度 ρ_f の流体が定常流速 v で管軸に沿って流れているとした。

本研究で理論解析により得られた結論を以下に示す。

- 管内流による曲管の平面運動を、今まで考慮されていなかった静的釣り合い状態における重力の影響を考慮し、管の中心軸は伸びないという仮定のもと、 $u(s, t)$ 、 $w(s, t)$ および $\theta(s, t)$ で表される非線形の方程式で表した。

- 得られた方程式の時間変動項を無視し、静的釣り合い状態を表す方程式を導出した。また、 $\gamma = 0$ のとき、管の形状は管にかかる軸力を調節することで、管の両端間の距離を直径とする半円形になることを確認した。
- 静的釣り合い状態を半円形とそれからの変動成分との和で表し、その変動成分を積分形を含む線形変数係数の常微分方程式で表した。得られた方程式の解をべき級数展開により求め、重力が管の静的釣り合い状態に与える影響を確認した。
- 管の面内自由振動について、管内定常流速が管の固有振動に影響を与えることを明らかにした。また、一次モードの振動形状を求めた。
- 管内脈動流による曲管の面内強制振動において v が管の固有振動数付近で振動振幅が最大となり、そのときの振動モードは固有振動状態での解析結果とよく一致した。実験により得られた結論は以下の通りである。
- 自由振動実験により、曲管の振動モードを確認した。また、管内定常流速の増加にともない、管の固有振動数は減少することを確認した。
- 曲管が脈動流成分と同じ振動数で振動することから、送水管は管内に脈動流が流れることにより、強制振動していることを確認した。
- 脈動流成分の振動数が固有振動数付近において最も励振された。また、そのときほぼ水平方向に振動していることを確認した。

Fig. A1 Analytical Model

1. はじめに

管内流による弾性送水管の振動問題は、流体関連振動の基礎的課題として多くの研究が行われてきた。しかし、弾性送水管の曲管部の振動に関する研究は工業的に重要な問題を含んでいるにもかかわらず、直管部の場合に比べ数少ない(1)(2)(3)(4)。

このような状況の中で、著者らは一連の研究において、管の空間運動に着目し、その運動を記述する方程式系の誘導を行った(5)。誘導された方程式を元に、管内定常流速が管の固有振動に与える影響を理論的・実験的に調べた。この結果は、Misraらの結果に帰着している(2)。一方、弦やケーブルの振動問題では、重力の影響により発生するたわみが弦やケーブルの不安定現象に時として大きく作用することが報告されている(6)。

本研究では、これらの事を念頭に入れ、従来の鉛直に吊り下げられた真っ直ぐな弾性送水管の方程式系の誘導を参考にしながら、重力の影響を考慮に入れた弾性送水管の曲管部の方程式系を導出する。

次に、重力の影響が曲管部の振動現象に及ぼす影響を明らかにする最初のステップとして、得られた支配方程式から時間変動項を無視し、曲管の静的釣り合い状態を明らかにする。そして、重力が曲管の静的釣り合い状態に及ぼす影響を検証する。その上で、面内強制振動の励振メカニズムに関して理論解析を行う。

さらにシリコンチューブに水を流す実験を行い、定常流速を変化させ、管の固有振動数の測定を行う。また、流速に脈動流成分を付加し、その振動数を変化させることで、曲管の面内振動を実験的に確認する。

2. 解析モデルおよび支配方程式

解析モデルを図1に示す。鉛直方向に X 軸、水平方向に Y 軸をとった固定座標系を考える。弾性送水管の上端は原点 O に固定され、鉛直に吊り下げられた状態から下端を Y 軸上に持ち上げて固定する。管軸に沿った座標を s とし、 X 軸方向変位を $u(s, t)$ 、 Y 軸方向変位を $w(s, t)$ および座標 s での接線と鉛直方向とのなす角度を $\theta(s, t)$ とする。

$X-Y$ 面内に拘束された弾性送水管を断面が一定で、中心軸の伸びないはりとし、その単位長さあたりの質量を m_p 、断面積を S_p 、曲げ剛性を EI とする。管内を流れる流体

Fig.1 Analytical Model

の密度を ρ_f とし、管軸に沿った流速を v とする。なお、非圧縮・一次元流れとする。さらに、流路断面積を S_f とし、管に働く軸力 T と内部流によって生じる管内圧力 pS_f の合力 $\Pi = T - pS_f$ を定義する。

弾性送水管の $X-Y$ 面内運動を表す無次元支配方程式系は、無次元量 $u = lu^*/\pi, w = lw^*/\pi, \Pi = EI\pi^2\Pi^*/l^2, s = ls^*/\pi$ および $t = \sqrt{(m_p + \rho_f S_f)/(EI)}t^*(l/\pi)^2$ を用い、以下のように表される(7)。

$$\ddot{u} \cos \theta + \ddot{w} \sin \theta = \Pi' + \theta' \theta'' - \sqrt{\beta} \dot{V} + \gamma \cos \theta \quad (1)$$

$$-\ddot{u} \sin \theta + \ddot{w} \cos \theta = \Pi \theta' - \theta''' - V^2 \theta' - 2\sqrt{\beta} V \dot{\theta} - \gamma \sin \theta \quad (2)$$

$$w' = \sin \theta \quad (3)$$

$$u' = \cos \theta - 1 \quad (4)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: u=0, w=0, \theta=0 \\ s=\pi: u=-\pi, w=2r, \theta=\pi \end{cases} \quad (5)$$

ここで $\dot{}, \theta'$ はそれぞれ t と s の微分を表す。また、式(1)~(5)およびこれ以降は無次元量を表す*は省略する。

式(1)~(5)の未知数 θ, u および w は独立変数 s, t と、四つの無次元パラメータである管内定常流速 $V_s = v_s / \sqrt{\pi^2 EI / \rho_f S_f l^2}$ 、管および管内流体の質量に対する管内流体の質量の比 $\beta = \rho_f S_f / (m_p + \rho_f S_f)$ 、重力と管の弾性力の比 $\gamma = (m_p + \rho_f S_f) g l^3 / EI \pi^3$ 、無次元半径 $r = \pi R / l$ で表される。

3. 静的釣り合い状態

式(1)~(4)において重力によるたわみを考慮するため、時間変動項を無視し、静的釣り合い状態を θ_s, u_s, w_s および Π_s とする。時間変動項を無視した式(1), (2)より θ_s を表す方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \theta_s''' - (\Pi_s(0) - V_s^2) \theta_s' + \gamma \sin \theta_s \\ = \frac{1}{2} \theta_s'^2(0) \theta_s' - \frac{1}{2} \theta_s'^3 - \gamma \theta_s' \int_0^s \cos \theta_s ds \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)において重力の影響を無視すると、 $\Pi_s(0) = V_s^2$ のとき、送水管の静的釣り合い状態は $\theta_s(s)' = \theta_0(s)' = 1(\text{const.})$ 、つまり、曲率が一定の形状、すなわち半円形となるため、管に重力が働く場合、曲率が一定の形状、すなわち半円形状から静的釣り合い状態が微小に変化していると考えられる。

そこで、 $\theta_s = \theta_c + \theta_g, w_s = w_c + w_g$ および $\Pi_s(0) = V_s^2 + \Pi_g(0)$ と置き、静的釣り合い状態への重力の影響を考える。ここで添え字 c は半円形状を表し、 g は半円形状からのたわみを表す。これらを式(1)~(3)に代入し、 θ_g が微小としてその2次以上の項を無視すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \theta_g''' - (\Pi_g(0) - 1) \theta_g' + \gamma \theta_g' \sin s - \theta_g'(0) \\ + \gamma \theta_g \cos s - \gamma \int_0^s \theta_g \sin s ds = \Pi_g(0) - 2\gamma \sin s \end{aligned} \quad (7)$$

$$w_g' = \theta_g \cos s \quad (8)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: w_g=0, \theta_g=0 \\ s=\frac{\pi}{2}: w_g=0, \theta_g=0 \end{cases} \quad (9)$$

ここで、式(7)は積分形を含む、変数係数の常微分方程式であるため、解析的に解くことが非常に困難である。そこで、 θ_g を以下のように s についてのべき級数展開を用いて表す。

$$\theta_g = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n \quad (10)$$

式(10)を式(7)に代入し、 s^n の係数を比較すると、 $a_n (n \geq 3)$ は以下のように定まる。

n が偶数の場合:

$$\begin{aligned} a_{n+3} = & \frac{\Pi_g(0) - 1}{(n+3)(n+2)} a_{n+1} \\ & - \frac{\gamma}{(n+3)(n+2)} \left\{ \sum_{k=1}^{n/2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} a_{n-2(k-1)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(n+1)n} \sum_{k=1}^{(n-2)/2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} a_{n-2-2(k-1)} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

n が奇数の場合:

$$\begin{aligned} a_{n+3} = & \frac{\Pi_g(0) - 1}{(n+3)(n+2)} a_{n+1} \\ & - \frac{\gamma}{(n+3)(n+2)} \left\{ \sum_{k=1}^{(n+1)/2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} a_{n-2(k-1)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(n+1)n} \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} a_{n-2-2(k-1)} \right\} \\ & - 2\gamma \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{(n+3)!} \end{aligned} \quad (12)$$

なお、 a_0, a_1 および a_2 は境界条件(9)より求めることができる。

図2に重力の影響により半円状態からたわんだ状態への変化を示す。同図より s がおおよそ $\pi/6$ 付近では半円に対し上方内側に入り込むことがわかる。また、おおよそ $\pi/4$ 付近では水平方向内側に入り込み、 $\pi/4 \sim \pi/2$ にかけては下方外側にたわんでいることがわかる。また、実験値より $u_g = 0.032$, $\Pi_g(0) = 6.31$ とした。

4. 面内振動

未知数 θ, u, w および Π が静的釣り合い状態 θ_s, u_s, w_s および Π_s から微小に変動したと考え、静的釣り合い状態からの変位を表す式に書き直す。ここで $\gamma = 0$ の場合を考えると、前節で述べたように静的釣り合い状態はほぼ半円形と見なせるため、 $\theta = \theta_c + \theta_d(s, t), w = w_c + w_d(s, t), u = u_c + u_d(s, t), \Pi = \Pi_c + \Pi_d(s, t)$ と表せる。添え字 d は静的釣り合い状態からの

Fig.2 Static Equilibrium State

変動分を表す。なお、管内流速 V は脈動流成分を含んでおり、次式で表される。

$$V = V_s(1 + \varepsilon \sin vt) \quad (13)$$

ここで $\varepsilon (< 1)$ は脈動流成分の大きさを表す。脈動流成分が送水管の面内運動へ与える影響を考えるために、無次元パラメータとして、無次元の脈動流成分の振幅 $\varepsilon = \Delta v/v_s$ および脈動流成分の振動数 $v = N\sqrt{(m_p + \rho_f S_f)/EI} (l^2/\pi^2)$ を導入する。式(1)~(5)において θ_d, w_d および u_d についての方程式に書き換えると以下ようになる。

$$\ddot{u}_d \cos s + \ddot{w}_d \sin s = \Pi'_d + \theta''_d - \sqrt{\beta} V_s \varepsilon v \cos vt \quad (14)$$

$$-\ddot{u}_d \sin s + \ddot{w}_d \cos s = \Pi_d - \theta'''_d - 2\varepsilon V_s^2 \sin vt - 2\sqrt{\beta} V_s \dot{\theta}_d \quad (15)$$

$$w'_d = \theta_d \cos s \quad (16)$$

$$u'_d = -\theta_d \sin s \quad (17)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: u_d=0, w_d=0, \theta_d=0 \\ s=\pi: u_d=0, w_d=0, \theta_d=0 \end{cases} \quad (18)$$

式(14)の右辺第3項は非同次項であり、管内流に脈動流成分が含まれることにより発生する強制力項である。

4.1 自由振動

管の自由振動を調べるため、式(14)~(18)において $\varepsilon = 0$ とする。式(14), (15)より Π_d を消去する。複素固有関数、複素固有値をそれぞれ $\Phi_d(s)$, λ と置き、 $\theta_d = \Phi_d(s)e^{\lambda t}$ とし、固有値問題を考える。式(14)~(18)を満たすように、固有関数 Φ_d を以下のようにべき級数展開を用いて表す。

$$\Phi_d = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n \quad (19)$$

また、複素固有値 λ は形式的に以下のような方程式で表せる。

$$f(\lambda; V_s, \beta) = 0 \quad (20)$$

複素固有値 λ は $i(\omega_r + i\omega_i)$ と表せ、実部 ω_r は管の面内振動の固有振動数に相当し、虚部 ω_i は減衰率に相当する。式(20)を数値的に解き、 λ を求めた。

図3に定常流速 V_s の増加に伴う一次モードの固有振動数 ω_r の変化を示す。 V_s が増加するに従い、 ω_r は減少している。また、 ω_i は0であった。なお、同図より本研究の解析結果がMisraら(2)の結果と良好に一致していることがわかる。

Fig.3 Natural Frequency of First Vibration Mode as a Function of V_s

4.2 管内脈動流による強制振動

管内流に脈動流成分が含まれると、式 (14) に示すように非定常流体力項 $\sqrt{\beta}V_s\varepsilon v \cos vt$ が存在する。そこで式 (14) ~ (18) の解を以下のように仮定する。

$$\theta_d = A(s) \sin vt + B(s) \cos vt \quad (21)$$

式 (14) ~ (18) に式 (21) を代入すると、 $A(s), B(s)$ についての微分方程式が得られる。その式から、 $A(s)$ および $B(s)$ をべき級数を用いて解くと水平方向変位 w_d は以下のように表される。

$$w_d(s, t) = \sqrt{W_A^2 + W_B^2} \sin(vt + \phi) \quad (22)$$

ここで、振幅 $\sqrt{W_A^2 + W_B^2}$ および位相差 $\phi(s)$ は s の関数である。

図4に得られた w_d についての一次の共振点付近における周波数応答曲線を示す。一次の固有振動数付近 $v = 4.14$ において振幅は最大となり、ここでは減衰を考慮していないため振幅は発散している。図5は共振点付近 $v = 4.14$ における曲管の振動形状を表している。これらは一次の固有振動状態での解析結果とよく一致している。また、計算には実験値である $\beta = 0.21$, $\varepsilon = 0.05$ および $V_s = 2.62$ を用いた。

数値計算の結果、求められた解を $A(s), B(s)$ についての微分方程式に代入した結果、 $A(s), B(s)$ それぞれについての誤差は図6に示すように 10^{-10} 程度であった。

Fig.4 Frequency Response Curves of Amplitude of w_d ($s = \pi/2, V_s = 2.62, \beta = 0.21, \varepsilon = 0.05$)

Fig.5 Stroboscopic Vibration Shapes of the Curved Pipe Associated with Primary Resonance of First Vibration Mode ($v = 4.14$)

Fig.6 Numerical Errors of Equations governing A and B

5. 実験

5.1 実験装置系

実験には図7に示す装置を用いた。管は内径4mm、外径8mmのシリコンチューブを用い、両端間距離450mm、全長707mmになるように設置した。弾性送水管の変位は、三次元リアルタイム動作解析システム Quick MAG System を用いて非接触で測定した。内部流の流速は、電磁流量計からの電気信号をFFTアナライザで読み取ることで測定した。

5.2 静的釣り合い状態

図8に、弾性送水管の静的釣り合い状態における写真を示す。図には半円形を破線で書いている。 s が $0 \sim \pi/4$ では半円よりも内側に入り、 s が $\pi/4 \sim \pi/2$ では半円よりも外側になっており、理論解析により求めた形状(図2)とよく一致している。

5.3 自由振動

定常流速 v_s が送水管の面内振動の固有振動数に与える影響を調べた。定常流速 v_s を変化させ、それぞれの流速において面内方向に一次モードに近い初期変位を与えて自由振動させた。定常流速 $v_s = 4.5\text{m/s}$ における鉛直方向成分 u_d 、水平方向成分 w_d の時刻歴と周波数分析結果を図9に示す。管の一次モードでの固有振動数はX方向、Y方向ともに2.1Hzであり、同図の変位 u_d および w_d の時刻歴から固有周期を読み取ることで求めた。

また、図3に流速の増加に伴う一次モードの固有振動数の変化を示した。解析結果と良好に一致している。

Fig.7 Experimental Apparatus

Fig.8 Photograph of the Static Equilibrium State

Fig.9 Free Vibration at Point B

5.4 強制振動

脈動流の振動数 N を 1.7 Hz から 3.0 Hz の範囲で上昇させた。 $s = \pi/2$, $N = 1.9$ Hz での管の鉛直方向変位 u_d 、水平方向変位 w_d および脈動成分 Δv の時刻歴とその周波数分析結果を図 10 に示す。 $N = 1.9$ Hz における振動形状の写真を図 11 に示す。ここで v_d は送水管の面外方向の変位を示しており、管は面外方向には振動していないことが確認できる。また、 $s = \pi/2$ において管の振動は水平方向が支配的であることも確認できる。脈動流成分の振動数とほぼ同じ振動数で管は振動していることから、管は脈動流に起因した強制力を受けて面内振動していることが分かる。 $s = \pi/2$ における、水平方向成分 w_d の振幅の周波数応答は図 12 のとおりである。●は脈動流の振動数と同じ振動数成分の振幅であり、○は 2 倍の振動数成分の振幅である。脈動流の振動数 N を上昇させた場合、面内振動の振幅が大きくなり、 N が 2.1 Hz で両者は最大となることが分かる。このことから、1 次モードの固有振動数である $N = 2.1$ Hz 付近において共振点を迎えていることがわかる。

6. 結論

本研究では、管内脈動流に起因する弾性送水管曲管部の面内振動の励振メカニズムを解明する第一歩として、これまで考慮に入れていなかった重力を含んだ曲管の平面運動を支配する方程式を誘導した。次に、静的釣り合い状態を求め、曲管の面内振動について、理論解析および実験を行った。その結果、以下の結論を得た。

- 管内流による曲管の平面運動を、今まで考慮されていなかった静的釣り合い状態における重力の影響を考慮し、管の中心軸は伸びないという仮定のもと、管軸方向、鉛直方向、水平方向変位および管軸と水平方向軸とのなす角度で表される非線形項を含む方程式で表した。
- 得られた方程式の時間変動項を無視し、静的釣り合い状態を表す方程式を導出した。また、 $\gamma = 0$ のとき、管の形状は管にかかる軸力を調節することで、管の両端間の距離を直径とする半円形になることを確認した。

- 静的釣り合い状態を半円形とそれからの変動成分との和で表し、変動成分についての方程式、すなわち積分形を含む線形変数係数の常微分方程式で表した。得られた方程式の解をべき級数展開により求め、重力が管の静的釣り合い状態に与える影響を確認した。

Fig.10 Time Histories of u_d , v_d and w_d and Their Spectra

Fig.11 Photograph of the In-plane Pipe Vibration for the 1st Mode

Fig.12 Frequency Response Curves of the Forced Vibration

文 献

- 管の面内自由振動について、管内定常流速が管の固有振動に与える影響を明らかにした。また、一次モードの振動形状を求めた。
- 管内脈動流による曲管の面内振動において v が管の固有振動数付近で振動振幅が最大となり、また、その振動モードは固有振動状態での解析結果とよく一致した。

さらに、シリコンチューブに水を流した実験を行い、管の静的釣り合い状態、管の面内自由振動および管内脈動流による管の面内振動について理論解析結果の確認を行った。その結果を以下に示す。

- 自由振動実験により、曲管の振動モードを確認した。また、管内定常流速の増加にともない、管の固有振動数は減少することを確認した。
- 流速に脈動流成分を付加した場合に、曲管は脈動流成分と同じ振動数で振動していることから、送水管は管内に脈動流が流れることにより、強制振動していることを確認した。
- 脈動流成分の振動数が固有振動数付近において最も励振された。また、そのときほぼ水平方向に振動していることを確認した。

- (1) Chen, S. S., Out-of-Plane Vibration and Stability of Curved Tubes Conveying Fluid, *Journal of Applied Mechanics*, **95**, (1973), 362-368.
- (2) Misra, A. K., Paidoussis, M. P. and Van, K. S., On the Dynamics of Curved Pipes Transporting Fluid Part I : Inextensible Theory, *Journal of Fluids and Structures*, **2**, (1988), 221-244.
- (3) Misra, A. K., Paidoussis, M. P. and Van, K. S., On the Dynamics of Curved Pipes Transporting Fluid Part II : Extensible Theory, *Journal of Fluids and Structures*, **2**, (1988), 245-261.
- (4) Dupuis, C., Rousselet, J., The Equation of Motion of Curved Pipes Conveying Fluid, *Journal of Sound and Vibration*, **153**, (1992), 473-489.
- (5) 田中 慎太郎, 管内脈動流に起因した弾性送水管曲管部の面外振動, 慶應義塾大学修士論文, (2003).
- (6) 高橋 和雄, 田川 賢, 池田 虎彦, ケーブルの面内非線形分岐応答解析, 土木学会論文集, **I-1** (1984), 333-340.
- (7) 新谷 智史, 管内流に起因する弾性送水管曲管部の面内振動 (重力の影響を考慮した場合), 慶應義塾大学修士論文, (2004).