527 低速回転コインの机上平伏時における高周波振動

High Frequency Vibration of the Slowly-Spinning Coins Falling Down on the table.

○正 村上 力 (無所属, 日本機械学会技術アドバイザー)

〒192-0373八王子市上柚木3-3-1006

MURAKAMI Chikara*(free, e-mail:45189901@d1.dion.ne.jp)

Slowly spinning coins on the table finally make high frequency noise when they fall down on the table. The author tries to give analytical solution or intuitive explanation using a very simple equation for spinning top he derived. The edge of the coin makes equivalent gravitational torque coefficients to attitude extremely large, this increases nutational mode frequency near at flat attitude. It is shown that the angle between spin axis and angular momentum vector becomes perpendicular both at high and at low spin speed. A simple analytical solution for frequency of the vibration is given.

Key words :Rolling coin, Conical motion, High frequency vibration, Spinning top, Attitude motion.

A1 極めて簡単なコマの線形近似運動方程式

筆者が以前に発表したコマの方程式を一部改良したものを述べる。Fig.A1に示す記号を用いてコインのスピンの軸S(対称軸で慣性率をC, 直交するラジアル軸のそれをA)の傾き角が微小な場合のコインの運動方程式を, スピンをしないデスピ座標系を用いて単一の複素係数2次微分方程式として表現可能で, 図の複素平面上に角運動量ベクトルH等を複素ベクトル(下線表示)の運動の軌跡としても表現可能である。即ち:

$$\underline{\dot{\theta}} + (k_N - i\Omega)\underline{\dot{\theta}} - (k + i\Omega k_P)\underline{\theta} = 0 \quad \text{コマの運動方程式 (A1)}$$

この式では k_P を形状だけの係数として Ω を分離表現した。2次式なので二つの固有値がありそれらを λ_N, λ_P とすると低摩擦における近似式は以下のように単純化される:

$$\lambda_N \approx -k_N + k_P + i\{\Omega - (k/\Omega)\} \quad (\text{章動 or N-モード}) \quad (\text{A2})$$

$$\lambda_P \approx -k_P + i(k/\Omega) \quad (\text{歳差 or Pモード}) \quad (\text{A3})$$

ただし k_N, k_P, k は重心の高さ: h , 接地点P近傍の曲率半径: r , 重力: Mg , 粘性摩擦係数: μ として次式で与えられる:

$$k_N = \mu h^2 Mg / A, \quad k_P = \mu hr Mg / C, \quad k = (h-r)Mg / A \quad (\text{A4})$$

Fig.A1 Coordinate systems and nomenclatures of a rolling coin.

A2 コインの場合の特殊条件

前述の諸式はP近傍が凸曲面としているが, コインでは平面なので(A4)式では $r \rightarrow \infty$ と考えることができ, 平伏に近い姿勢では, $k_P \gg k_N \approx 0$ となり章動モードは極端に不安定, 歳差モードは十分な安定である。重要な点は(A1)式の重力項が $k\theta \rightarrow k(\theta)\theta$ と表現され, $k(\theta)$ が双曲線状の非線形で, 平伏に近いとFig.A2に示すように $-\infty$ となる。この時(A2)式は:

$$\lambda_N = k_P / 2\sqrt{k} + i(\sqrt{k} + \Omega/2) \quad (\text{A5})$$

このモード周波数は平伏に近いほど高周波となる。

Fig.A2 Attitude restoring coefficients of coins and tops

高速の Ω ではHが鉛直のまま, SがHを軸として描く円錐の半頂角Nは $N = 90^\circ$ の横立ち安定となる。風損や摩擦によって Ω とHが小さくなると $N \approx 90^\circ$ を保持したままSが起立し, 逆にHは水平に近づき急増した重力トルクによるHの増分 ΔH がFig.A3に示すようにHを高速回転させ, Hを周回するSの回転は結果的にZ軸まわりの高速回転となる。

Fig. A3 Behavior of H and S due to decrease of rotation velocity.

1 まえがき

自転車の車輪単体が転がりながら倒れる問題は中田，国枝の論文^{1,2)}にあるが，ほぼ水平に倒れる寸前の振動数に関しては触れていない．本稿では滑らかな，つまり摩擦の小さい机上でのコインの横立ち回転から倒れる際の高周波振動を，著者が1995年に導出したコマの運動方程式³⁾から導くとともに，角運動量ベクトルの動きに着目した直感的な説明を加え，パソコンでの結果や振動数の近似解析解も与える．本稿の解析ではコインは机との接点で滑りを生じ，その際に接点における机との相対速度に比例する摩擦：粘性摩擦が発生し，それが重心まわりの外部からの弱いトルクとなるが，摩擦力による重心移動：並進運動は無いものとする．

2 コマの運動方程式のコインへの適用

2.1 回転運動の根本原理

回転運動の根本原理は回転体の角運動量 H に外部トルク Q が作用する際のニュートン力学の基本方程式である：

$$\frac{dH}{dt} = Q \quad (1)$$

Q は直接にスピン軸 S を動かすのではなく， H に作用して変化を与え，その結果，間接的に S を動かす，ということで， Q が無ければ S は H を中心軸とする一定の円錐を描き続け， S の周回角速度（章動角速度） Ω と円錐の半頂角 N は保持される． Q が作用すると H は移動するが S は元の位置から新 H を中心軸とし，新 Ω の角速度で新 N を半頂角とする新円錐を描き始める．以上が力学の教科書で欠落している重要な事柄で， S は各瞬間ごとの H を中心に選ぶことに留意されたい．

2.2 コマの運動方程式の適用による類推

コマの運動方程式(A1)式は軸対称の回転軸が天頂方向から微小な傾きの場合のみに適用可能である．つまりコインの場合にはコインの面がほぼ水平に近い状態である．コマや丸っこい回転体では基石も含めて微小傾き角では，重心から見た接点の天頂（鉛直）軸からの傾き角は微小であるが，コインでは接点のコインのエッジとなって天頂軸から非常に離れ，また低重心のため，重心から見てほぼ水平に近い方向で接することになる．つまり(A4)式で $r \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$ と考えることができるので， $k_P \gg k_N \approx 0$ ，となり(A2)式の章動モードは極端に不安定，(A3)式の歳差モードは十分な安定である．特筆すべきは，重力トルク係数または姿勢剛性 $k(<0)$ が極端な非線形で，姿勢角に対して双曲線状となり，平伏時には Fig.A2 に示すように $-\infty$ となることである．

固有値の(A2,3)式から章動モードは不安定でモード周波数は前回りで高速であるのに対して歳差モードは急激に収束す

る後ろ回りの方向をとる．低速で転がり状態のコインが急に倒れた場合には鉛直軸に対して非対称な挙動をとることがあるが，逆方向の過剰に安定な歳差モードによって章動モードの発散は軸対称に近づき，ラジアル方向に対して均等な振動に漸近する．倒れかかきの初期に，両モードの逆符号の周波数が接近してビートになることも考えられる．

コインを水平から少し傾けた状態で高速回転が与えられるとしたら，スピン速度 n ，従って章動角速度 Ω が増大し， H も増大してほぼ鉛直となるが，章動モードが不安定なので，スピン軸 S の方向は H から離れ，次第に倒れて最後には直角な横向きスピンとなる．直角は発散の限度角である．つまり S が発散して $N=90[\text{deg}]$ まで倒れるが，コインの表裏は対称であるからそれ以上は進まない．この横向き回転があたかも安定モードにあるように見える．しかし実際には表裏の不安定境界上で一見安定して回転している，と解釈できる．

逆立ちゴマも章動発散するが，上下非対称なので $90[\text{deg}]$ を通り越して発散の限界角度 $180[\text{deg}]$ の倒立まで達する．

減速した平伏寸前の状態では S が鉛直に回復するが，不安定の筈である．この場合には風損や摩擦による減速で H が小さくなるので重力と摩擦のトルクの影響を受けやすくなり， H が水平に倒れてほぼラジアル成分のみとなり，逆にスピン軸 S は H に対してほぼ直角を保ったまま立ち上がり，鉛直に近づくと考えられる．その結果，短くなり，水平に近くなった H が，大きい重力トルク係数からくる直角方向の H の増分によって高速に水平に引き回され， Ω が小さくなったので(A5)式から H は $\sqrt{k}$ の超高速の水平回転をする．つまりこれが接点 P の周回速度であると考えられることができる．

3 コインの横向き回転からの変化

高速回転時におけるコインが横向き（横立ち）にある状態からの挙動には微少角近似の(A1)式は使えないが，文献[4.5]により H が天頂軸に近ければ(A1)式が適用可能なので計算例として後述する．従ってここでは高速と低速に分けて図を使った横向き回転の「安定性」の定性的な説明を試みることにする．

Fig.1 に示すように最初に鉛直方向にある H に対してスピン軸 S が水平から少し立ち上がった状態が突然起こったと想定する．この状態では瞬間的回転軸である角速度ベクトル ω は接地点 P に近いが P よりは内側であり，摩擦トルクは $-z$ 方向でその角力積は H の方向を S から遠ざける方向に加算される（線形領域の歳差モード効果に相当）．一方，重力は S を起立させる力なので重力トルク方向は図示するように紙面のこちら側に向かう．もしもこの姿勢のままで回転を続けるとすれば，両トルクは時間積分されて角力積または増分角運動

量となり、Fig.1を天頂から見るとFig.2に示すように重心を中心とする単位球面の赤道より少し上にSが描く大きな円のほかに2種類の小さな円を描く。Fig.1からも分かるように重力トルクは摩擦トルクより90[deg]位相が進んでいる。重力トルクは回転速度に左右されないが、摩擦トルクは粘性摩擦成分を含んでいれば高速では大きく、低速では小さくなる。以下、横向き回転からの挙動を、重畳の理に基づく両トルクの作用から定性的な説明をする。

3.1 高速横向き回転の安定性

高速では H が長大になるので、その先端に加算される円は重心から見た角度で表現した正距方位図のFig.2では両円とも小さくなるが（図では説明のため大きく描いている）、同図では短時間に描く同じ角度の円弧を太い矢印で示している。高速では粘性摩擦が効いて摩擦の円のほうが大きく、これによって N が増大し、 S の円が拡大し、 S を水平に近づける作用をする。それと直交する重力トルク円弧では N の増減はなく、その回転速度を高める作用をしている。 N の増減はなくても円錐の中心が原点から離れるのでその影響は S の軌道を元のその内側、つまり S を立ち上げる作用となる。このように両トルクは相反する作用をするが、高速では摩擦が勝つので S は下へ下がって赤道に近づき、二円ともに小さくなり、赤道で安定となる（横立ち/横向き回転）。

3.2 低速横向き回転の安定性

低速では H が短小となるので外部トルクによる H の方向変化の影響が大きくなる。低速では摩擦の効果が小さくなり、重力トルクが優勢となり S が起立する。その際に摩擦トルクの影響はゼロではないから、 N が少し増大する。増大してもFig.1から90[deg]を大きく超すことない。なぜならそれを超すと摩擦方向が逆転するからである。

結局、 S は赤道からスパイラル状に天頂に向かい、逆に H は $N \approx 90[\text{deg}]$ を保持したまま、天頂からスパイラル状に離れて赤道に接近するであろうことが推察できる(Fig.3)。このことは短小化し水平に近づいた H は殆どコイン面にあってラジアル成分のみとなりコインの頂点近傍方向を指す。この状況では角速度 ω も章動角速度 Ω もほぼ H に一致し(Fig.A3)、 S はこのラジアル軸まわりに回転しようとする、転がりによって接触するコインのエッジが移動し、これが重力トルクの方角変化をもたらしていると考えられることもできる。

ここまではコインの厚さを無視したが、これを考慮に入れると摩擦トルクは H から少しずれて下向きとなり、 H の縮小だけでなく H の水平化に寄与する。

平伏の終わり頃では重力トルク係数がFig.A2に示す双曲線の高い位置に到達しているので、短くなり、ほぼ水平になった H を高速にひきまわして高周波の振動を発生する、と考えることもできよう。

Fig.1 Generation of external torques on spinning coin.

Fig.2 ΔH due to external torques (f:friction, g:gravity).

Fig.3 Horizontal component of frictional torque.

4 コインの運動の近似解析

ここでは(A1)式利用したパソコンによる簡単な近似計算法を述べる。文献(4,5)では H が天頂に近ければ複素正距方位図で S の挙動がどの方向でも表現可能であることを示したが、コインの場合には S と H と重心が作る平面がほぼ子午面に近いので、複素正距方位図上ではほぼ原点の天頂近くを通り、両者の座標位置はほぼ正確に表現されることになり、甚だ好都合である。従って、このような広範囲の姿勢運動に対応する外部トルクの定式化を示し、そのモデルを用いたパソコンによる計算結果を示そう。

4.1 外部トルクの定式化

$$\ddot{\theta} + (k_N - i\Omega)\dot{\theta} - (k + i\Omega k_P)\theta = 0 \quad (A1)$$

において、コインの状況に沿って最初に k_N を無視し、重力トルクの大きさをコインの厚さを無視して $Q_g \cos[\theta]$ とする。 Q_g はコインを水平から起こすときの有限のトルクであり、重力 Mg に半径 a を乗じた $Q_g = aMg$ である。これを(A1)式の $k\theta$ の形で表現するためにラジアル慣性能率 $A = Ma^2/4$ で割って： $q_g = Q_g/A$ とする。まず重力項の大きさ $k\theta$ は：

$$k\theta = q_g \cos[\theta] \quad (2)$$

さらにこれに θ の方向を与える必要がある。重力トルク方向は姿勢の傾きを復原する方向であるから、 $\underline{S}$ の90[deg]位相遅れ： $-i\underline{S} = -i(-i\theta) = -\theta$ の位相成分を考慮し $-\theta/|\theta|$ を乗ずる必要がある。従って重力トルク項： $k\theta$ は：

$$k\theta \rightarrow -k\theta \cdot \theta/|\theta| = -\{q_g \cos[\theta]/|\theta|\} \cdot \theta \quad (3)$$

(3)式の $\{\}$ 内は $k(\theta)$ またはFig.A2の双曲線特性に相当し、 $\underline{S}$ が原点に近い、つまり平伏に近い状態では $|\theta|$ に反比例して急増し、これが平伏時の高周波振動の主な原因となる。

つぎに摩擦トルクの項： $i\Omega k_P \theta$ を検討する。Fig.4において半径 a のコインの厚さを無視し、また、簡単のために角速度方向は H に一致するものとする。 H を回転軸とすれば接点 P の回転半径 ρ は： $\rho = a \cos[N]$ で、これが接点の速度に比例し、摩擦力に比例する。摩擦トルクはスピン軸の逆方向であるが、さらなる簡単のために H の方向変化のみに注目して H に垂直な成分のみを考慮する。つまりFig.4に示すように、全摩擦トルクの大きさに $\sin[N]$ を乗ずる。その方向は S から H の方向、つまり $\dot{\theta}$ の方向である。 Ω を一定として：

$$i\Omega k_P \theta \rightarrow (\Omega k_P) \sin[N] \cos[N] \cdot \dot{\theta} / |\theta| \quad (4)$$

の形で表現可能である。以上をまとめると(A1)式は：

$$\ddot{\theta} = i\Omega \dot{\theta} + (\Omega k_P) \sin[2N] / \Omega \cdot \dot{\theta} / |\theta| - \{q_g \cos[\theta] / |\theta|\} \theta \quad (5)$$

となり、以下、この式を使ってパソコンで計算する。

Fig.4 Incremental component to H due to frictional torque.

4.2 計算機による計算例

本節では横向き回転から姿勢を少し立ち上げ、角運動量ベクトル H は鉛直状態を初期値として章動角速度 Ω が高速と低速に分けてその影響を調べることにする。

H と S のどちらかが水平近くまで倒れることになるので、それらの軌跡は複素正距方位図を用いて表現することにする。高速では $\Omega = 100$ 、低速では $\Omega = 8$ にする以外の係数と初期値は： $k_P = 2.5$, $q_g = 250$, $\underline{\theta}_0 = 1.31i$, $\dot{\underline{\theta}}_0 / \Omega = \underline{N}_0 = -1.31$ で共通の定数とする。

4.2.1 高速回転 ($\Omega = 100$)

原点から出発した H の軌跡がFig.5である。Fig.2で示した ΔH の虚軸左側へのはみ出しが S の拡大には寄与している。最初に描く H 円の直径は約1.4[deg]程度で急速に収束する、収束後も $t \approx 5$ の周期で前回り低周波周回を続ける。低周波モードは後ろ回りの筈であるが、 H の反対側を周回する S は横立ちよりも平伏に近づくので、この部分で重力トルク増大し、一周の平均に対して影響が大きくなるからである。

Fig. 5 Locus of H starting from the origin(high speed).

Fig. 6 Locus of S starting from a point on the Re-axis.

Fig. 6は $t=0 \sim 1$ までの S の軌跡である。緩慢に発散するスパイラルであるが、赤道への純粹な漸近ではなく、Fig. 5に示した H の低周波モード分が赤道からのみ出しとなっている。赤道を越えると重力トルクが逆方向となることが関係しているように思われる。

4.2.2 低速回転 ($\Omega=8$)

(5)式において $\Omega=8$ だけを変えて他は不変のままで、 S と H を時間 $t = 0 \sim 10$ までを連続記録したのがFig. 7である。ただし H は N の過渡現象に重点を置いて $t = 0 \sim 1.1$ とした。高速の場合と状況が逆転し、姿勢が平伏に近づき、 H は天頂からかなり開いた円錐に移行している。 H が高速の場合の $8/100$ に低下したのでFig. 7の H の最初のループは高速の場合の約その逆倍率に拡大し、出発点からの虚軸左へのはみ出しが微少になっている。 S と H はともに低速の歳差モードは後ろ回りで、コインの横立ちからぐらりと水平に倒れて再度横立ちに近づく状況つまり天頂に対する非対称挙動を、 S の最大点(横立ち)を緑矢印で示し、順番に1, 2, ...とした。歳差モードの安定効果によって $t=3$ 以降はこの低周波モードは殆ど消滅してFig. 8のような完全な円に収束し、 $|N|=\pi/2$ となっている。Fig. 8はほぼ収束に近い最後の1周で、 H と S は完全に逆位相にあり、両者の距離 $|N|$ はほぼ $\pi/2$ で、 N が原点を通ることも予測通りで正距方位図が有効であることを示している。ただし過渡状態では原点から多少離れる現象も見られた(省略)。

Ω を定数に固定した計算をしたので $\Omega=8$ では S は約 $0.5[\text{rad}]$ までしか起立できなかったが、 $\Omega=2$ にすると S は約 $0.038[\text{rad}]$ まで平伏し、周回の周期も前者の 0.24 に対し、 0.077 となるので周波数が 3.1 倍に上がる。(A5)式によれば周波数はほぼ傾き剛性の $1/2$ 乗: $\sqrt{k(\theta)}$ に比例するから剛性は約 1 桁上昇したと思われる。

Fig. 7 Loci of S , H , and N : asymmetrical coning motion. Fig. 8 N passing over the origin, holding $|N|=\pi/2$.

5 コイン平伏時の振動数

これまでの計算例から、(5)式には定常解が存在し、 N が $\pi/2$ に漸近し、 Ω が低くなると $|\dot{\theta}|$ が小さく周回速度が上昇する傾向が分かった。ここでは(5)式の定常近似解を求めてみる。 α , β を実数の定数として定常解を次のように想定し、従って $\ddot{\theta}$ の定常解はゼロではなく次のように与えられる:

$$\ddot{\theta} = \alpha e^{i\beta t} \rightarrow \ddot{\theta} = i\beta \alpha e^{i\beta t} = i\beta \dot{\theta} \quad (6)$$

これを(5)式に代入し、 $N=\pi/2$ により右辺第2項はゼロで、さらに $|\dot{\theta}|$ を微少として $\cos|\dot{\theta}|=1$ を用いると:

$$i\beta \dot{\theta} = i\Omega \dot{\theta} - q_g \dot{\theta} / |\dot{\theta}| = i\Omega \dot{\theta} - i q_g S / |S| \quad (7)$$

ここでは $\dot{\theta} / |\dot{\theta}| = i S / |S|$ を用いた。整理して絶対値をとるが、さらに $N=\dot{\theta} / \Omega$ が S の逆方向で大きさが $\pi/2$ であるから

$$(\beta - \Omega) |\dot{\theta}| = (\beta - \Omega)(\pi/2)\Omega = q_g \quad (8)$$

これからコインの平伏時の振動角周波数 β は:

Fig.9 Rotation angles of P and Ω are equal.

$$\beta = \frac{2}{\pi} \frac{q_g}{\Omega} + \Omega \quad (9)$$

理論的には風損等で $\Omega \rightarrow 0$ となるから $\beta \rightarrow \infty$ となる。

ここで Ω と θ との関係を示す。Fig.9はその説明図で、平伏に近い傾き角 θ のコインが Ω の角速度で回転するときの Δt の時間に接点 P の移動角と角運動量を慣性モーメント A で割ったものの移動角が等しくなることが定常状態であるから、

$$\frac{\Delta H'}{H'} = \frac{q_g \Delta t}{\Omega} = \frac{\Omega \Delta t}{\theta} \quad (10)$$

従って Ω が与えられた場合の取り得る θ の値は：

$$\theta = \frac{\Omega^2}{q_g} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{q_g}{\theta}} \quad \text{ただし} \quad q_g = \frac{aMg}{Ma^2/4} = \frac{4g}{a} \quad (12)$$

この式からも平伏寸前の姿勢は $\beta \rightarrow \infty$ となることと、半径が小さいほど高周波になり易いこともわかる。

パソコンでFig.5-8のようにして求めた結果、

$$\Omega = 1, \theta = 0.03[\text{rad}], 102[\text{rev/t}], (9)\text{式}: 25.4[\text{rev/t}]$$

となって理論式は約1/4となっている。(9)式の Ω に対する逆比例特性や、(11)式の Ω の2乗比例特性等の傾向はよく合っているが、4倍の違いの原因は現時点では未解決である。

結 言

1. 線形のコマの運動方程式から、コインの回転は章動モードが不安定で、角運動量 H と回転対称軸 S は高速でも低速でも発散して互いに 90[deg] まで開き、高速ではほぼ H が天頂で S は水平を、低速では S が天頂で H は水平を指す。
2. 低速で S が天頂に近い場合には S の傾きに対する重力の等価バネ係数が接地点がコインのエッジであるために双曲線状に増大するので章動モード周波数を増大する。
3. 横立ちから倒れ始める際に天頂に対して非対称な倒れかたをしても、安定な歳差モードによって短時間に天頂に対称なスパイラル運動に変化して平伏に接近する。
4. 平伏時の振動数に関する近似解析解を与えた。

あとがき

コインの高周波振動現象を何かに利用できないかと「コインと回転」のキーワードで電網検索したところ、実用例があった⁶⁾。これは歯科医が使うスケラと称する 6～16[kHz] の高周波振動による歯石除去装置である。電磁力を使わずに空気圧を利用する。すなわち、コイン状の振動子を円筒内に収容し、側面の穴から送気する。円筒の片方の端面は外部への震動源となり、他端面は空気の戻りで、振動子にも空気が通る穴が開いている。

コインの振動に関連したものとして、ラートまたはフープと称する体育器具があげられよう⁷⁾。身長より大きい直径の二つの丈夫なループを人体が入れる程度に離して 10 本程度の棒で両者を固定し、それを両手で掴み、かつ両足も固定する。言わば人間入りの厚めのコインと見ることもできよう。転がりながら倒れる場合にはコインと似た現象が見られる。コインの場合と同様に平伏に近いと角運動量が微少となるのでエネルギーは極めて低い。従って内部の人体の重心移動によって容易に角運動量が増大可能のように見受けられる。体重を近平伏時に上側に移動すれば q_g が小となり、(9)式から旋回速度 β を減速でき、平伏からの離脱を容易にできそうである。ただし、地面との摩擦がコインより大きいと思われるのでコインの理論がそのまま当てはまるとは限らない。

最後にタイヤの転倒問題であるが、ラートの場合と同様に机上と違って摩擦が大きく、かつ重心の移動を前提にするので姿勢と併進の両者が絡んだ複雑な問題である。結局文献(1)では複雑な連立の数式を使って倒れるまでの大きな円からタイヤ直径の円へと縮小するスパイラル軌跡を与えている。本稿では低摩擦を前提とするのでコインの重心周りの姿勢運動だけに絞った。従って接点の軌跡はタイヤとは逆に内部から拡大してコインの大きさに収束するスパイラルになる。

文 献

- (1) 中田孝：「工学解析：技術者のための数学手法」オーム社、pp.139-150、昭和41年1月10日第1版第1刷発行。
- (2) 国枝正春：「機械実用力学-実際問題のモデル化と解法」理工学社、pp.132-141、1999年12月。
- (3) 村上 力：「コマから衛星まで一回転体の運動と制御」日本ロケット協会モノグラフ 3 (JRS-M-3)、1996年4月、販売：(財)日本学会事務センター、(入手不能らしい)
- (4) 村上 力：「逆立ちゴマの回転倒立運動について」、日本機械学会 D&D'04、講演番号:514,2004。
- (5) 村上 力：「コマの線形化運動方程式の広域化」、日本機械学会 D&D'05、講演番号:509,2005。
- (6) URL: <http://www.micdent.com>
- (7) 御手洗毅、小野京右：「ラート体操機構の基本運動特性の解析」、日本機械学会 D&D'04、講演番号:428,2004。