161 接触回転系におけるパターン形成現象 (多自由度系に対する動吸振器の効率的な設計法)

Pattern Formation Phenomena in Contact Rotating Systems (Efficient Design of Dynamic Absorbers for Multi-Degree-of-Freedom Systems)

○正 宗和 伸行 (九州大) 正 近藤 孝広 (九州大)
正 森 博輝 (九州大) 学 北村 幸嗣 (九州大[院])

Nobuyuki SOWA, Kyushu University, 744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka
Takahiro KONDOU, Kyushu University
Hiroki MORI, Kyushu University
Takashi KITAMURA, Graduate school of Kyushu University

While the contact rotating systems are operating, the periodic polygonal deformation patterns are often formed on the peripheral surfaces of rolls. Such phenomena are called pattern formation phenomena. In the previous report, the authors introduced an optimum design method of dynamic absorber for one or two degree-of-freedom systems by using a new stability analysis method to prevent the pattern formation phenomena and the effectiveness of the method was confirmed. In this report, an efficient design of dynamic absorbers is proposed for multi DOF systems. This method is one of designing each dynamic absorber one by one for each mode. This design method results in an efficient and effective design of dynamic absorbers for multi DOF systems.

Key Words: Stability Analysis, Self-Excited Vibration, Viscoelastic Body, Time Delay System, Pattern Formation Phenomena, Dynamic Absorber, Genetic Algorithm

A 1. 結 言

機械システムの中には、一定の線圧のもとで他の被接触系との接触を保持しながら、ロールが回転するような系が数多く存在する。このような接触回転系においては、接触面に周期的なパターンが形成され、その自励的な成長に伴って大きな振動を引き起こす問題がしばしば発生している。このような現象をパターン形成現象と呼ぶ。

著者らは、その主要な発生メカニズムを線形時間遅れ系の不安定自励振動に起因する現象と捉えることによって不安定振動の発生領域を解析し、種々の防止対策の検討を行ってきた。その防止対策の1つとして動吸振器による安定化を検討しその有効性を確認した。その際の安定解析では、著者らが開発した安定・不安定境界の存在条件に基づく新しい安定判別法を適用し大幅な解析効率の向上を実現している。しかし、対象としたモデルは1自由度および2自由度系であり、より大きな自由度を有する系に対して同様の検討を行う場合、新しい安定判別法を利用しても計算量は膨大となり効率的な設計が困難となる。

そこで、本報では3自由度以上の多自由度系に対する動吸振器の効率的な設計法を提案する。

A 2. 効率的な動吸振器の設計法

図A1に示すような多段ロールからなる多自由度系モデルを対象として検討を行った。本報で適用した安定判別法では次式で表される系の安定度を利用した。

$$\hat{\sigma}_r(\hat{\Omega}, \bar{n}) \equiv \frac{\hat{\Omega}}{\alpha} \ln |\rho_r(\hat{\Omega})| - \hat{\phi} + 2\pi(m-1) \quad \cdots \cdots (A1)$$

式(A1)を用いて以下に示すモード毎の設計法を提案する

- (1) 動吸振器を取り付けていない主系単体の不減衰固有角振動数 $\bar{\omega}_j$ および固有モード ϕ_j を求める。
- (2) 式(A1)を用いてすべてのモードに関する極小値を求める。 j 次モードに対する極小値を $\sigma_{\min,j}$ とする。
- (3) $\sigma_{\min,j}$ が最も小さなモードを設計対象とする。
- (4) 固有モード ϕ_j より最も振幅の大きなロールを選択し、動吸振器を取り付けるロールとする。

(5) 対象モードに関する極小値に注目しその値が最大となるように動吸振器のパラメータを調整する。その際、他のモードに関する極小値は考慮しない。

(6) (5)で決定した動吸振器を取り付けた状態で全ての $\sigma_{\min,j}$ を求め、その値が最小となるモードを対象に新たに動吸振器を追加し(5)と同様に設計する。取り付けるロールは、(5)で設計した動吸振器を取り付けた状態の固有モードにより選択した最大振幅のロールとする。

(7) 最小となる $\sigma_{\min,j}$ がそれ以前に設計した動吸振器の対象モードと同じであれば、その動吸振器を再設計する。以上の操作を最後に設計対象としたモードの $\sigma_{\min,j}$ が最小値のまま改善されなくなるまで繰り返す。

A 3. 結 果

最終的な安定度は必ずしも最大とはならないが、特定のモードに対する安定性向上に集中する様なこともなく、無駄の少ない均整のとれた設計が実現可能となった。加えて、新しい安定判別法の有効性を改めて確認できた。

Fig. A1 Analytical model with multi DOF system

1. 緒 言

機械システムの中には、一定の線圧のもとで他の被接触系との接触を保持しながら、ロールが回転するような系が数多く存在する。このような接触回転系においては、接触面に周期的なパターンが形成され、その自励的な成長に伴って大きな振動を引き起こし、製品の品質の悪化を招いたり、機械の正常な運転を妨げるといった問題がしばしば発生している。このような現象をパターン形成現象と呼ぶ。

著者らは、その主要な発生メカニズムを線形時間遅れ系の不安定自励振動に起因する現象と捉えることによって、広範な問題に対する不安定振動の発生領域の解析を可能としてきた⁽¹⁾。その解析手法は、線形時間遅れ系の特性根を直接求めて安定判別を行う方法である。しかし、この方法は非常に厳密である反面、超越方程式を解く必要があり、大規模な系においては膨大な計算が必要で、方法論的に必ずしも使い易いものとはなっていない。

この問題を解決するため、既報^{(2),(3)}では安定・不安定境界の存在条件に基づく新しい安定判別法を開発し、種々のパターン形成現象の防止対策の検討に適用してきた。この安定判別法は得られる結果が厳密であり、その計算量は従来の安定判別法と比較すると大幅に減少している。また、系の安定度を設計目的に応じた様々な形式で表現可能であり自由度の高い設計が可能となった。その防止対策の1つとして動吸振器による安定化を検討し、その有効性を確認した^{(2),(4)}。しかし、対象としたモデルは1自由度および2自由度系であり、より大きな自由度を有する系に対して同様の検討を行う場合、新しい安定判別法を利用して計算量は膨大となり効率的な設計が困難となる。

そこで、本報では3自由度以上の多自由度系に対する動吸振器の効率的な設計法を提案する。その際、前述した安定・不安定境界の存在条件に基づく安定判別法を適用しその有効性の検証も行う。

2. 多段ロールモデルの運動方程式

2・1 解析モデル 図 1 に多段ロールモデルの解析モデルを示す。このモデルは、鑄鉄ロールおよび粘弾性の特性を持つゴムロールからなっており、すべてのロールはその回転中心が同一直線上に並ぶように配置され、他のロールとすべりのない接触回転をしている。ゴムロールの直径はすべて同一であり、角速度 $\omega = 2\pi/T$ (T は周期) で回転しているものとする。斜線のある円がゴムロール、斜線の無いものが鑄鉄ロールである。鑄鉄ロールおよびゴムロールは合わせて n 段あり、それぞれ交互に配置されているものとする。ただし、最上段および最下段はいずれも鑄鉄ロールであり、鑄鉄ロールは $(n-1)/2 + 1$ 個、ゴムロールは $(n-1)/2$ 個から構成される。ゴムロールは鑄鉄ロールに挟まれて接触回転しているため、上下 2 カ所に接触点を有し、それぞれの接触点で粘弾性変形が生じる。その変形量の一部は残留変形量としてゴムロールの半回転周期後に変形が生じた点とは異なる接触点にフィードバックされる。このフィードバック効果により不安定振動が発生し、ゴムロール表面上に多角形状のパターンが形成される。

それぞれのロールはばねおよび減衰器からなる支持要素によって基礎に支持されている。ゴム部の粘弾性特性は、剛性のみを有する瞬時弾性変形部（右肩添字 i で表す）と剛性および減衰を有する遅延弾性変形部（右肩添字 d ）からなる 3 要素モデル⁽¹⁾でモデル化する。なお、ロールの回転軸方向の曲げ変形は無視できるものとする。と番目のロ

ールの物理量を右下添字 k で表し下段から $k=1, \dots, n$ とする。ただし、ゴムロールの上部あるいは下部の物理量として表す必要がある場合はそれぞれ右肩添字 " U " および " L " を用いる。振動防止対策として取り付ける動吸振器は各ロールに必要な応じて $\tilde{n}_k$ 個取り付けが可能であり、すべての動吸振器の個数を $\tilde{n} = \tilde{n}_1 + \dots + \tilde{n}_n$ とする。動吸振器に関する物理量は頭号 " $\sim$ " で表し、 k 番目のロールに取り付ける動吸振器は右下添字 k で表す。また、個々の動吸振器は番号をつけて区別するものとし右肩添字 $\tilde{k} (=1, \dots, \tilde{n})$ で表す（ただし、取り付けロールおよび動吸振器番号が特定できない場合はそれぞれ k^* および $\tilde{k}^*$ とする）。

2・2 運動方程式 ゴムの特性はゴムロールの上下で等しいものとする。各ロールおよび動吸振器の変位をそれぞれ $x = x(t)$ および $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ 、瞬時弾性変形部と遅延弾性変形部との境界の変位を $z = z(t)$ として運動方程式を導くと以下のように整理できる。 k 番目のロールに関しては、

$$m_k \ddot{x}_k + c_k \dot{x}_k + k_k x_k + f_{k-1} + f_{k+1} - \sum_{i=1}^{\tilde{n}_k} \left\{ \tilde{c}_k^{\tilde{k}^*} (\dot{\tilde{x}}_k^{\tilde{k}^*} - \dot{x}_k) + \tilde{k}_k^{\tilde{k}^*} (\tilde{x}_k^{\tilde{k}^*} - x_k) \right\}_i = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

となる。ここに、 $\dot{} = d/dt$ であり、 f_{k-1} および f_{k+1} はそれぞれ $k-1$ 番目および $k+1$ 番目のロールから受ける力を表す。 k 番目が鋳鉄ロールの場合、

$$\left. \begin{aligned} f_{k-1} &= k_{k-1}^i(x_k - x_{k-1} - u_{k-1}^U), \quad u_{k-1}^U = x_k - z_{k-1}^U \\ f_{k+1} &= k_{k+1}^i(x_k - x_{k+1} + u_{k+1}^L), \quad u_{k+1}^L = z_{k+1}^L - x_k \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

ゴムロールの場合、

$$\left. \begin{aligned} f_{k-1} &= k_k^i(x_k - x_{k-1} - u_k^L), \quad u_k^L = z_k^L - x_{k-1} \\ f_{k+1} &= k_k^i(x_k - x_{k+1} + u_k^U), \quad u_k^U = x_{k+1} - z_k^U \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

となる。ここに、 $u = u(t)$ は接触点通過直後の遅延弾性変形部の変形量である。 k 番目のゴムロールの z_k^* および z_k^v 点におけるつり合いの式は遅れ時間 $T/2$ を考慮すると、

$$\begin{aligned} k_k^t(x_{k-1} - x_k + u_k^t) + c_k^d(\dot{u}_k^L - \varepsilon \dot{u}_{k,T/2}^U) + k_k^d(u_k^L - \varepsilon u_{k,T/2}^U) &= 0 \\ k_k^t(x_k - x_{k+1} + u_k^t) + c_k^d(\dot{u}_k^U - \varepsilon \dot{u}_{k,T/2}^L) + k_k^d(u_k^U - \varepsilon u_{k,T/2}^L) &= 0 \\ u_{k,T/2}^L = u_k^L\left(t - \frac{T}{2}\right), u_{k,T/2}^U = u_k^U\left(t - \frac{T}{2}\right), \varepsilon = \exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。ここに、 α はゴムの回復特性指数を表す。 k 番目のロールに取り付ける動吸振器の運動方程式は、

$$m_k^{\ddot{k}} \ddot{\tilde{x}}_k^{\ddot{k}} + \tilde{c}_k^{\ddot{k}} (\dot{\tilde{x}}_k^{\ddot{k}} - \dot{x}_k) + \tilde{k}_k^{\ddot{k}} (\tilde{x}_k^{\ddot{k}} - x_k) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

Fig. 1 Analytical model with multi DOF system

で表され系全体で $\tilde{n}$ 個となる。以上より、本モデルは式(1)および式(5)の $n+\tilde{n}$ 個の運動方程式と式(4)の $n-1$ 個のつり合いの式によって記述される。ここで、 $k=1, 2, \dots, n$ 番目のロールに関する運動方程式、 $\tilde{k}=1, 2, \dots, \tilde{n}$ 番目の動吸振器に関する運動方程式、下から $l=1, 2, \dots, n-1$ 番目の粘弾性変形部のつり合いの式の順に整理して行列表示すると、

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky - \varepsilon C_D \dot{y}_{T/2} - \varepsilon K_D y_{T/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ {}^t K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \\ C_D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{D22} \end{bmatrix}, K_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{D22} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ u \end{bmatrix} \\ \bar{x} &= ({}^t x, {}^t \tilde{x}), {}^t x = (x_1, \dots, x_n), {}^t \tilde{x} = ({}^t \tilde{x}_1^1, \dots, {}^t \tilde{x}_k^{\tilde{n}}) \\ u &= ({}^t u_2^L, u_2^U, \dots, u_k^L, u_k^U, \dots, u_{n-1}^L, u_{n-1}^U) \\ M_{11} &= \text{Diag}[m_{11}^{11}, \tilde{m}_{11}^{22}] \\ m_{11}^{11} &= \text{diag}[m_1, \dots, m_n], \tilde{m}_{11}^{22} = \text{diag}[\tilde{m}_k^1, \dots, \tilde{m}_k^{\tilde{n}}] \\ C_{11} &= \begin{bmatrix} c_{11}^{11} + \tilde{c}_{11}^{11} & -\tilde{c}_{11}^{12} \\ -{}^t \tilde{c}_{11}^{12} & \tilde{c}_{11}^{22} \end{bmatrix}, K_{11} = \begin{bmatrix} k_{11}^{11} + \tilde{k}_{11}^{11} & -\tilde{k}_{11}^{12} \\ -{}^t \tilde{k}_{11}^{12} & \tilde{k}_{11}^{22} \end{bmatrix} \\ c_{11}^{11} &= \text{diag}[c_1, \dots, c_n], \tilde{c}_{11}^{22} = \text{diag}[\tilde{c}_k^1, \dots, \tilde{c}_k^{\tilde{n}}] \\ k_{11}^{11} &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2^i & -k_2^i & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -k_{k-2}^i & k_{k-1}^i & -k_k^i & \\ & & & -k_k^i & k_k^R & -k_k^i \\ 0 & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & -k_{n-1}^i & k_n + k_{n-1}^i \end{bmatrix} \\ k_{k-1}^i &= k_{k-1} + k_{k-2}^i + k_k^i, k_k^R = k_k + 2k_k^i \\ \tilde{k}_{11}^{22} &= \text{diag}[\tilde{k}_k^1, \dots, \tilde{k}_k^{\tilde{n}}] \\ K_{12} &= \begin{bmatrix} k_2^i & & & & 0 \\ -k_2^i & k_2^i & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -k_{k-2}^i & k_k^i & \\ & & & -k_k^i & k_k^i & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & & -k_{n-1}^i & k_{n-1}^i \\ & & & & & & -k_{n-1}^i \end{bmatrix} \\ C_{22} &= \text{Diag}[c_{22}^2, c_{22}^4, \dots, c_{22}^k, \dots, c_{22}^{n-1}] \\ K_{22} &= \text{Diag}[k_{22}^2, k_{22}^4, \dots, k_{22}^k, \dots, k_{22}^{n-1}] \\ c_{22}^k &= \text{diag}[c_k^d, c_k^d], k_{22}^k = \text{diag}[k_k^i + k_k^d, k_k^i + k_k^d] \\ C_{D22} &= \text{Diag}[c_{D22}^2, c_{D22}^4, \dots, c_{D22}^k, \dots, c_{D22}^{n-1}] \\ K_{D22} &= \text{Diag}[k_{D22}^2, k_{D22}^4, \dots, k_{D22}^k, \dots, k_{D22}^{n-1}] \\ c_{D22}^k &= \begin{bmatrix} 0 & c_k^d \\ c_k^d & 0 \end{bmatrix}, k_{D22}^k = \begin{bmatrix} 0 & k_k^d \\ k_k^d & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

である。式(7)の k_{11}^{11} および K_{12} は k 番目のロールがゴムロールの場合で記述している。 M, C, K, C_D および K_D は $2n+\tilde{n}-1$ 次、 M_{11}, C_{11} および K_{11} は $n+\tilde{n}$ 次、 C_{22}, K_{22}, C_{D22} および K_{D22} は $n-1$ 次の正方行列、 K_{12} は $(n+\tilde{n}) \times (n-1)$ 行列である。 $m_{11}^{11}, c_{11}^{11}, \tilde{c}_{11}^{11}, k_{11}^{11}$ および $\tilde{m}_{11}^{22}, \tilde{c}_{11}^{22}$ および $\tilde{k}_{11}^{22}$ は $\tilde{n}$ 次の正方行列、 $\tilde{c}_{11}^{12}$ および $\tilde{k}_{11}^{12}$ は $n \times \tilde{n}$ 行列である。 $y, \bar{x}, x, \tilde{x}$ および u はそれぞれ $2n+\tilde{n}-1, n+\tilde{n}, n, \tilde{n}$ および $n-1$ 次元ベクトルである。左肩記号“ t ”は転置行列を表す。なお、 $\tilde{c}_{11}^{11}, \tilde{c}_{11}^{12}, \tilde{k}_{11}^{11}$ および $\tilde{k}_{11}^{12}$ は動吸振器の取り付けロールによって異なるが、第 $\tilde{k}$ 番目の動吸振器を第 k

番目のロールに取り付ける場合、 $\tilde{c}_{11}^{11}$ および $\tilde{k}_{11}^{11}$ には k 行 k 列に、 $\tilde{c}_{11}^{12}$ および $\tilde{k}_{11}^{12}$ には k 行 k 列にそれぞれ $\tilde{c}_k^{\tilde{k}}$ および $\tilde{k}_k^{\tilde{k}}$ を加えればよい。なお、最下段および最上段に関してはそれぞれ下ロールおよび上ロールからの影響が無いため対応するパラメータを 0 としている。

3. 効率的な動吸振器の設計法

3.1 安定・不安定境界の存在条件に基づく安定判別法

これまで著者らは安定・不安定境界の存在条件に基づく新しい安定判別法を確立してきた⁽²⁾⁻⁽³⁾。この方法は従来の方法と比較して系の安定度を極めて効率的にかつ厳密に求めることが可能であり防止対策の設計に大きな効果を発揮する。本報では多自由度系に対する動吸振器の設計にこの手法を適用する。まず、ゴムロールの回転周期が 2π となるように $\tau = \omega t$ の変数変換を行い、初期値をすべて零としてラプラス変換を行うと次の特性方程式が得られる。

$$[\omega^2 s^2 M + \omega s C + K - \varepsilon'(\omega s C_D + K_D)]Y = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\det[\omega^2 s^2 M + \omega s C + K - \varepsilon'(\omega s C_D + K_D)] = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\varepsilon' = \varepsilon \exp(-\pi s)$ であり $Y = ({}^t \bar{X}, U)$ は $y = [\bar{x}, u]$ の像関数である。従来の厳密な安定判別法は、式(9)より求められる特性根 $s = \sigma + iN$ ($i = \sqrt{-1}$) の実部 σ より系の安定判別を行う方法である⁽¹⁾。式(9)は超越方程式であるため特性根 s は加算無限個存在し、そのうち σ が正値の特性根がひとつでもあれば系は不安定となる。また、特性根の虚部 N は発生するパターンの角形数に相当する。

安定・不安定境界上では式(9)の特性根の実部 σ は零となるので、 $s = iN$ において式(8)に代入すると、境界上の特性方程式は、

$$[(K - \Omega^2 M + i\Omega C) - \rho(K_D + i\Omega C_D)]Y = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここに、

$$\rho = \varepsilon \lambda, \lambda = \exp(-i\pi N), \Omega = N\omega \quad \dots\dots\dots (11)$$

であり、式(10)から Y 中の $\bar{X}$ を消去して整理すると、

$$[A(\Omega) - \rho B(\Omega)]U = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。ここに、

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= K_{22} + i\Omega C_{22} - {}^t K_{12}(K_{11} - \Omega^2 M_{11} + i\Omega C_{11})^{-1} K_{12} \\ B(\Omega) &= K_{D22} + i\Omega C_{D22} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。 $U \neq 0$ の条件より次式が得られる。

$$\det[A(\Omega) - \rho B(\Omega)] = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$A(\Omega), B(\Omega)$ は $n-1$ 次の複素正方行列であるので、式(14)の一般固有値問題を解くことで、 $n-1$ 個の複素固有値として $\rho_r = \rho_r(\Omega)$ ($r=1, 2, \dots, n-1$) を求めることができる。さらに、 $\rho(\Omega)$ の大きさと偏角の条件より次式が得られる。

$$|\rho_r(\Omega)| = \varepsilon_r = \exp\left(-\frac{\pi N \alpha}{\Omega}\right) \Rightarrow N = -\frac{\Omega}{\pi \alpha} \ln |\rho_r(\Omega)| \quad (15)$$

$$\arg \rho_r(\Omega) = \arg \lambda_r = -N\pi \Rightarrow N = -\frac{1}{\pi} \arg \rho_r(\Omega) \quad (16)$$

式(15)および式(16)より N を消去して整理すると

$$\sigma_r(\Omega) = \frac{\Omega}{\alpha} \ln |\rho_r(\Omega)| - \arg \rho_r(\Omega) \quad \dots\dots\dots (17)$$

が定義でき、安定・不安定境界上では $\sigma_r(\Omega) = 0$ が成り立つ。よって、 $\sigma_r(\Omega) = 0$ を満たす実数 Ω が存在すれば安定・不安定境界すなわち不安定領域が存在することになり、 Ω が存在しなければ $\sigma_r(\Omega)$ は正負どちらか一方の値を取りすべての領域で安定となる。よって $\sigma_r(\Omega)$ の符号によって系の安定判別が可能となる。詳細は省略するが既報⁽²⁾⁻⁽³⁾と同様に系の安定条件は $\sigma_r(\Omega) > 0$ であり、 $\sigma_r(\Omega) < 0$ の領

域が不安定領域を表す。

3.2 安定判別法の特長およびその利用法 本報で適用する安定・不安定境界の存在条件に基づく安定判別法は、その特長^{(2),(3)}を利用すれば非常に効率的な運用が可能となる。以下ではその具体的な手法について簡単に述べる。

(1) 不安定な回転数領域の求め方

(i) 式(17)より $\sigma_r(\Omega)=0$ を満たす安定・不安定境界の Ω および $\arg \rho_r(\Omega)$ を求める。

(ii) 式(16)より対応する N を求める。

(iii) 式(11)の第3式より境界の回転数 ω を求める。

(iv) 2つの境界に挟まれた領域が不安定領域となる。この不安定領域で発生するパターンの角係数 $\bar{n}$ は N に近い値となる。また、 $\Omega=N\omega$ の関係より Ω は発生する不安定振動の角振動数とみなすことができ、 j 次モードの不安定振動は $\omega_j \approx \bar{n}\omega$ (ω_j : j 次の不減衰固有角振動数) となる領域で発生することから⁽¹⁾ $\Omega \approx \omega_j$ の領域に存在する $\sigma_r(\Omega) < 0$ となる領域は j 次モードの不安定領域となる。

(2) 極小値 $\sigma_{\min}$ による安定判別法

(1)の方法で全ての不安定領域を求めることが可能ではあるが、すべてのモードおよび角形数に対する不安定領域の境界を求めるのは非効率的である。2つの境界に挟まれた不安定領域において $\sigma_r(\Omega)$ は極小値 $\sigma_{\min}$ をとるので、この極小値を利用すればすべて領域の安定判別を行うことが可能となる。極小値をとる Ω を $\hat{\Omega}$ とし各変数の特徴について説明する。

(i) 極小値 $\sigma_{\min}$: $\sigma_{\min}$ は不安定振動が発生し得る領域の安定度を表す。 $\sigma_{\min}=0$ を境にその領域で不安定振動の発生の有無が決定される。その領域が不安定であれば $\sigma_{\min} < 0$ であり安定度の低減とともに $\sigma_{\min}$ は小さくなり不安定領域は広がる。 $\sigma_{\min} > 0$ であればその領域では不安定振動は発生せず安定度の増加とともに $\sigma_{\min}$ の値はさらに大きくなる。

(ii) 極小値における $\arg \rho_r(\hat{\Omega})$: $\arg \rho_r(\hat{\Omega})$ は式(16)より発生パターンの角形数に対応することがわかる。 N が発生パターンの角形数 $\bar{n}$ に近い値をとることを考慮すると $\bar{n}=1$ の領域では $\arg \rho_r(\hat{\Omega}) \approx -\pi$ となり、 $\bar{n}=2$ の領域では $\arg \rho_r(\hat{\Omega}) \approx -2\pi$ となるはずである。さらに、 $\arg \rho_r(\hat{\Omega})$ は 2π 毎の値を取る所以で式(16)より対応する発生角形数は2角形毎変化する。つまり前者は $\bar{n}=1, 3, 5, \dots$ の奇数角形、後者は $\bar{n}=2, 4, 6, \dots$ の偶数角形に対応する。

(iii) $\sigma_{\min}$ と $\arg \rho_r(\hat{\Omega})$ の関係: 前述の通り $\arg \rho_r(\hat{\Omega})$ は発生パターンが奇数角形あるいは偶数角形でその値が異なるので、それぞれに対応する $\sigma_{\min}$ も奇数角形あるいは偶数角形の領域の安定度を表すこととなる。 $\arg \rho_r(\hat{\Omega})$ が 2π 変化すれば $\sigma_{\min}$ も 2π 変化するので $\bar{n}=1$ および $\bar{n}=2$ に対する $\sigma_{\min}$ を求めれば $\bar{n}=3$ 以上の領域の安定度を容易に計算することができる。

以上より、 $\bar{n}=1$ あるいは $\bar{n}=2$ に対する $\arg \rho_r(\hat{\Omega})$ の値を $\hat{\phi}$ とすれば $\bar{n}$ 角形領域の安定度は正整数 m を用いて、

$$\hat{\sigma}_r(\hat{\Omega}, \bar{n}) \equiv \frac{\hat{\Omega}}{\alpha} \ln |\rho_r(\hat{\Omega})| - \hat{\phi} + 2\pi(m-1) \quad \cdots \cdots (18)$$

で表される。ただし、 $\hat{\phi} \approx -\pi$ であれば $\bar{n}=2m-1$ の奇数角形、 $\hat{\phi} \approx -2\pi$ であれば $\bar{n}=2m$ の偶数角形領域の安定度を表す。よって、 $\hat{\sigma}_r(\hat{\Omega}, 1)$ および $\hat{\sigma}_r(\hat{\Omega}, 2)$ を求めれば式(18)を用いることですべての領域の安定度の検討が可能となる。

最後に極小値 $\sigma_{\min}$ を利用する安定判別法を整理する。

(a) $\bar{n}=1$ および2に対応する極小値 $\sigma_{\min}$, $\arg \rho_r(\hat{\Omega})$ および $\hat{\Omega}$ を求める。

(b) $\hat{\Omega} \approx \omega_j$ であれば $\sigma_{\min}$ は j 次モードの不安定振動

に対する安定度を表す。

(c) 対応するモードに対して $\sigma_{\min} \geq 0$ であれば安定、 $\sigma_{\min} < 0$ であれば不安定となる。なお、 $\Omega \approx \omega_j$ に極小値が存在しなければ j 次モードは安定と判断する。

(d) $\sigma_{\min}$ は $\arg \rho_r(\hat{\Omega}) \approx -\pi$ であれば奇数角形に対応し、 $\arg \rho_r(\hat{\Omega}) \approx -2\pi$ であれば偶数角形に対応する。

(e) 正整数 m に対して $-2\pi m < \sigma_{\min} < -2\pi(m-1)$ であれば、奇数角形に対しては $\bar{n}=2m-1$ 角形、偶数角形に対しては $\bar{n}=2m$ 角形以下の領域で不安定となる。

(f) 不安定な回転数領域の概算値は式(11)および式(16)を利用して $\hat{N} = -\arg \rho_r(\hat{\Omega})/\pi \Rightarrow \hat{\omega} \approx \hat{\Omega}/\hat{N} \approx \hat{\Omega}/\bar{n}$ として導出可能となる。

以上のように時間遅れが半回転周期の場合は奇数角形あるいは偶数角形によって取り扱いが多少異なるが式(18)の m に対応する角形数 $\bar{n}$ を求める必要がなければ、特に意識する必要はなく $\arg \rho_r(\hat{\Omega})$ の値を利用することで対応する回転数領域は容易に計算可能である。

3.3 動吸振器の設計手順

本報で適用する安定判別法では複素固有値 $\rho_r(\Omega)$ を求める必要がある。 $\rho_r(\Omega)$ の個数は接触点の個数と一致し、系全体の自由度には依存しない。よって、本モデルの場合、取り付ける動吸振器の個数にかかわらず $n-1$ 個の $\rho_r(\Omega)$ すなわち $\sigma_r(\Omega)$ が得られ、極小値 $\sigma_{\min}$ も各モードに対して最大 $n-1$ 個まで取り得る。しかし、実用上は最も安定度の低い最小の $\sigma_{\min}$ に注目し、その値を最大とする動吸振器を設計すればよい。

ただし、設計の要素としては動吸振器の質量、剛性係数および減衰係数に加えて取り付け位置や個数が考えられる。これらの要素を同時に考慮して設計すると本手法を用いてもその計算量は膨大となる。既報⁽⁴⁾において2自由度系に対する動吸振器の設計を行った結果、各固有モードに対して1個ずつその固有振動数に近い固有振動数を有する動吸振器を付けることで効果が得られる傾向にあることがわかった。

そこで、本報では多自由度系に対する動吸振器の設計法として以下に示すモード毎に設計する手法を提案する。

(1) 動吸振器を取り付けていない主系単体の不減衰固有角振動数 ω_j および固有モード ϕ_j を求める。

(2) すべてのモードに関する極小値を求める。ここで、 j 次モードに対する極小値を $\sigma_{\min,j}$ とする。

(3) $\sigma_{\min,j}$ が最も小さなモードを設計対象とする。

(4) 固有モード ϕ_j より最も振幅の大きなロールを選択し、動吸振器を取り付けるロールとする。

(5) 対象モードに関する極小値に注目しその値が最大となるように動吸振器のパラメータを調整する。その際、他のモードに関する極小値は考慮しない。

(6) (5)で決定した動吸振器を取り付けた状態で全領域の $\sigma_{\min,j}$ を求め、その値が最小となるモードを対象に新たに動吸振器を追加し(5)と同様に設計する。取り付けるロールは、(5)で設計した動吸振器を取り付けた状態の固有モードにより選択した最大振幅のロールとする。

(7) 最小となる $\sigma_{\min,j}$ がそれ以前に設計した動吸振器の対象モードと同じであれば、その動吸振器を再設計する。以上の操作を最後に設計対象としたモードの $\sigma_{\min,j}$ が最小値のまま改善されなくなるまで繰り返す。

本設計法では設計工数は増加するもののそれぞれ動吸振器単体の設計計算が飛躍的に単純化されるとともに、すべてのモードに対して効果的な動吸振器設計の実現が期待できる。なお、本報では動吸振器のパラメータの設計には遺伝的アルゴリズム(以後GAと呼ぶ)を適用した。

4. 数値計算結果

4.1 安定判別法の特長の検証 ここでは、多段ロールモデルの最も単純な例として鋳鉄－ゴム－鋳鉄の3段ロールからなる3自由度系のモデルを対象とする。表1に3自由度モデルの主系パラメータ、表2に主系単体の固有角振動数 $\bar{\omega}_j$ および固有モード $\phi_j = [\phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j}]$ を示す。ここに、 ϕ_j は $\phi_{1j}=1.0$ としている。このパラメータに対して式(17)の $\sigma_r(\Omega)$ を計算した結果を図2に示す。図2は式(18)において $m=1$ (すなわち $\bar{n}=1$ および $\bar{n}=2$)に相当する結果を示している。 $\sigma_r(\Omega)$ は Ω に対して2つの値($r=1, 2$)をとっておりゴムロールの接触点の個数と一致していることが確認できる。図中の一点鎖線および点線は $\Omega=\bar{\omega}_j$ および $\sigma_r(\Omega)=-2\pi(m-1)$ を表す。 $\sigma_r(\Omega)$ の極小値は'○'で表されておりモード毎に2個ずつ存在することがわかる。

表3にこれらの極小値に関する値を示す。 $r=1$ および $r=2$ に関する極小値ではそれぞれ $\bar{N} \approx 2$ および $\bar{N} \approx 1$ であることから $\sigma_1(\Omega)$ および $\sigma_2(\Omega)$ はそれぞれ偶数角形および奇数角形の安定度を表すことがわかる。したがって、1次モードおよび3次モードの $r=1$ に関する極小値は正であり安定となるため、偶数角形の不安定振動は発生しない。極小値が負となる不安定領域では最大何角形の領域まで

Table 1 Parameters of three DOF model

Parameters	Values	Parameters	Values
m_1, m_2, m_3 (kg)	21	k_1 (MN/m)	12.0
c_2 (Ns/m)	0	k_2 (MN/m)	0
c_1, c_3 (Ns/m)	33.5	k_3 (MN/m)	8.0
c_2^d (kNs/m)	68.5	k_2^d (MN/m)	35.1
α (1/s)	2.0	k_2^s (MN/m)	6.3

Table 2 Natural angular frequencies and natural modes

j	$\bar{\omega}_j$ (rad/s)	ϕ_{1j}	ϕ_{2j}	ϕ_{3j}
1	486.4	1.0	2.32	1.48
2	846.4	1.0	0.43	-1.35
3	1008.4	1.0	-0.75	0.5

Fig. 2 Relationship between Ω and $\sigma_r(\Omega)$

Table 3 Data on minimum values of $\sigma_r(\Omega)$

$\bar{\Omega}$ (rad/s)	j	r	$\sigma_{\min,j}$	$\bar{N}$
485.7	1	2	-77.4	0.77
488.1	1	1	9.93	1.99
844.7	2	2	-19.7	0.95
844.8	2	1	-42.6	1.87
1006.6	3	2	-49.4	0.86
1034.0	3	1	45.9	2.03

不安定振動が発生するかを容易に知ることができる。たとえば、1次モードの $r=2$ に関する極小値は-77.4であり3.2節の(2)-(e)項の $-2\pi m < \sigma_{\min} < -2\pi(m-1)$ の関係を考慮すると $m=13$ であり $\sigma_2(\Omega)$ は奇数角形に関する安定度を表すので $\bar{n}=2 \times 13 - 1 = 25$ 角形の領域まで不安定振動が発生することがわかる。また回転数領域の概算値は3.2節の(2)-(f)項より $\bar{\Omega}/\bar{n} = 485.7/25 = 19.5$ (rad/s) = 3.09 (Hz)と導出できる。1次モードの25角形の正確な不安定領域を3.2節の(1)項の手順に従って実際に求めると $3.10 < f < 3.13$ (Hz)であり、概算値とほぼ一致する。以上のように不安定な角形数領域および回転数領域の概算値は極小値により容易に求めることが可能である。他の極小値に関しても同様の手続きで求めることができる。以上の結果は従来の安定判別法による結果と完全に一致しており、本報における安定判別法が厳密であることを確認している。

4.2 動吸振器の設計法の検証 3自由度モデルでは3個の動吸振器で主系の安定度を増加させることが期待できる。そこで、3個の動吸振器を各ロールに1個ずつ取り付け $\sigma_{\min,j}$ の最小値が最大となる動吸振器パラメータを3個同時に設計する。ただし、動吸振器の質量は主系のロール質量の10%: $\bar{m}_k^k = 2.1$ kgで一定とする。したがって、設計変数は3個の動吸振器それぞれの剛性係数 $\bar{k}_k^k$ および減衰係数 $\bar{c}_k^k$ の合計6個となる。設計に適用したGAに関する条件値を表4に示す。設計パラメータは固有角振動数比 $\bar{v}_k^k$ および減衰比 $\bar{\zeta}_k^k$ とし以下の式で与えられる。

$$\bar{v}_k^k = \frac{\bar{\omega}_k^k}{\bar{\omega}_1}, \quad \bar{\zeta}_k^k = \frac{\bar{c}_k^k}{2\sqrt{\bar{m}_k^k \bar{k}_k^k}}, \quad \bar{\omega}_k^k = \sqrt{\frac{\bar{k}_k^k}{\bar{m}_k^k}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $\bar{\omega}_1$ は主系の1次の固有角振動数、 $\bar{\omega}_k^k$ は動吸振器単体の固有角振動数である。設定範囲は $0 < \bar{v}_k^k \leq 2.5$ および $0 \leq \bar{\zeta}_k^k \leq 1.024$ とし両者とも 2^{10} 分割とした。以上の条件下でGAにより求められたパラメータを表5に、そのパラメータによる安定判別の結果を図3に示す。図3の'▲', '△'および一点鎖線はそれぞれ主系単体、動吸振器単体およびの動吸振器を取り付けた状態での全系の固有角振動数を表す。動吸振器の効果によりすべてのモードにおいて安定度は増加しているが完全に安定化はしていない。このパラメータにおける $\sigma_{\min,j}$ の最小値は1次モードの $r=2$ に対する極小値でありその値は $\bar{\Omega} = 331.2$ (rad/s)で $\sigma_{\min,1} = -2.86$ となる。4.1節と同様に不安定振動が発生する領域を求めると1角形の領域で $41.4 < f < 75.7$ (Hz)となる。この領域が系全体で最も低い不安定な回転数領域である。主系のみとの結果と比較すると運転可能な安定領域は大幅に拡大しており動吸振器による対策が有効であるといえる。

ただし、GAによってこれらのパラメータを得るには1777世代まで計算する必要があった。また、動吸振器単体の固有角振動数は3個とも主系単体の1次モード付近に集中している。これは2次モードおよび3次モードの安定化よりも極小値が最も小さい1次モードの安定度を増加させることを優先した結果であると考えられる。このとき、すべてのモードの極小値がほぼ同程度になっており、3個の動吸振器はすべてのモードに対して効果的に働いているとは言い難い。これは最小の $\sigma_{\min,j}$ が最大となるように設計した結果であり、この方法は多自由度系に対する動吸振器の設計には適してないと言える。

そこで、3.3節で提案したモード毎の設計法を実施する。図2および表3の結果より1次モードの極小値が最も小さいことがわかる。よってStep1では1次モード用の動吸振器を設計する。表2の固有モードより、1次モードではロールIIの振幅が最も大きいので、動吸振器をロールIIに

取り付けて 1 次モードの極小値 $\sigma_{\min,1}$ が最大となるように動吸振器の剛性係数および減衰係数を設計する。この際、1 次モード以外の極小値は考慮する必要がないため $\Omega \approx \omega_1$ 近傍のみ検討すれば十分であり設計変数も 2 個しかないため計算量の大幅な減少が期待できる。実際の GA の計算では 28 世代で収束した。

Step2 では Step1 で設計された 1 次モード用の動吸振器を取り付けた状態で極小値および固有ペアを求める。結果の表示は省略するが、2 次モードの極小値 $\sigma_{\min,2}$ が最も小さく対応する固有モードよりロール III がもっとも振動しているという結果が得られた。よって 2 次モード用の動吸振器をロール III に取り付け GA により $\sigma_{\min,2}$ が最大となるようなパラメータを設計すると 33 世代目で収束した。

Step3 では 3 次モードの極小値が最小であり、対応する固有モードより判断した結果、3 次モード用の動吸振器はロール I に取り付け Step2 と同様に検討した。その結果、3 次モードでは 3 次モード近傍の極小値が消滅し完全に安定化するパラメータが数多く得られるので、数世代 GA の計算をした後、減衰の小さなパラメータを選択した。

Step4 では Step3 までの 3 個の動吸振器を取り付けた状

Table 4 Calculation parameters for genetic algorithm

Population number	Generation number	Crossover Probability	Mutation Probability
150	2000	0.8	0.01

Table 5 Parameters of dynamic absorbers obtained by GA

k	1	2	3
$\bar{v}_k^k$	1.00	0.74	1.02
$\bar{\zeta}_k^k$	0.29	0.18	0.32

Fig. 3 Result of simultaneous design for all modes

Table 6 Parameters of dynamic absorbers obtained by GA

k	1	2	3
j	3	1	2
$\bar{v}_k^k$	1.95	0.76	1.42
$\bar{\zeta}_k^k$	0.13	0.18	0.20

Fig. 4 Result of design per mode

態で、1 次モードの極小値が再度最小となったので 1 次モードの動吸振器を他の 2 個の動吸振器を付けたまま再設計すると 107 世代目で最終パラメータが得られた。

その結果を表 6 と図 4 に示す。ロール II ($k=2$) に取り付けた 1 次モード用の動吸振器のパラメータは同時設計の結果とほぼ同じ値である。しかし、2 次モードおよび 3 次モード用の動吸振器についてはそれぞれ主系単体の固有角振動数の 0.82 および 0.94 倍の値であり減衰も同時設計の結果より小さな値となり、既報⁽²⁾で導いた 1 自由度系に対する動吸振器の最適設計の結果に類似した値となっている。同時設計の結果と比較すると 2 次モードは若干ではあるが極小値が増加しており、3 次モードでは大幅に改善されていることがわかる。1 次モードの極小値は $\dot{\Omega}=339.0$ (rad/s) で $\sigma_{\min,1}=-3.37$ と若干減少しているが不安定領域は 1 角形の領域で $41.3 < f < 77.4$ (Hz) とほとんど変化していないことがわかる。同時設計の場合と比較すると設計工数は多少増加するが GA を含む全体の計算量が大幅に減少するとともに全ての領域で均整のとれた結果が得られた。

また、7 段のロールからなる 7 自由度系モデルを対象に本設計法を適用した。結果の図示は省略するが 3 自由度系モデルと同様な結果が得られた。さらに、7 個の動吸振器を同時設計した結果と比較するとモード毎の設計法では 6 個の動吸振器でより安定度の高い結果が得られた。これは同時設計で適用した GA の個体数や世代数が十分でなかった結果であり、設計変数の増加とともにこれらの値を適切に増やして計算する必要がある。この場合、より高い安定度は得られるが必要な計算量も増加しモード毎の設計の計算量との差がさらに拡大する。

以上の結果より本報で提案したモード毎の動吸振器の設計法は多自由度系に対する設計において非常に効率的に均整のとれた結果が得られることが確認できた。

5. 結 言

本報では多自由度系に対する動吸振器の効率的な設計法としてモード毎の動吸振器を 1 個ずつ順番に設計する手法を提案した。すべての動吸振器を同時に設計する手法と比較して、最終的な安定度は必ずしも高くないが、同程度の安定性を有しかつ特定のモードに対する安定性向上に集中する様なことのない無駄の少ない均整のとれた設計が可能となった。本報では 1 角形および 2 角形の領域の安定化を行ったが、特定の回転数における安定度を評価関数とすることも可能である。この様に目的に応じた自由度の高い設計が実現したのは安定・不安定境界の存在条件に基づく安定判別法を適用したためであり、この安定判別法の有効性を改めて確認できる結果となった。

最後に、本研究は平成 17 年度および 18 年度独立行政法人日本学術振興会科学研究費 [基盤研究(B), 課題番号 17360108] の補助を受けたことを記し謝意を表する。

参考文献

- (1) 末岡・ほか 7 名, ゴム巻きロールの多角形化現象, 日本機械学会論文集(C編), 59-563, pp. 2078-2085, 1993.
- (2) 近藤・宗和・森・崔, 接触回転系におけるパターン形成現象に対する動吸振器の最適設計 (第 1 報, 1 自由度系の場合), 日本機械学会論文集(C編), 71-704, pp. 1131-1138, 2005.
- (3) 宗和・近藤・森・崔, 接触回転系の時間遅れに基づく不安定振動の防止対策 (第 1 報, 新しい安定判別法の適用), 日本機械学会論文集(C編), 71-709, pp. 2670-2678, 2005.
- (4) 三上・近藤・宗和・森・崔, 接触回転系におけるパターン形成現象に対する動吸振器の最適設計 (多自由度系の場合), D&D2005 講演会, 講演番号 128