211 内圧を受けるトリスフェリカル殻の塑性分岐座屈解析

Plastic Bifurcation Buckling of Torispherical Shells under Internal Pressure

○正 大矢 弘史 (IHI) 正 津乗 充良 (IHI) 須藤 翔 (IHI)

Hiroshi OHYA, IHI Corporation., 1, Shin-nakahara-chou, Isogo-ku, Yokohama

Mituyoshi TSUNORI IHI Corporation.

Shou SUDO IHI Corporation.

Finite element method using axisymmetric shell element is applied to the buckling of torispherical shells under internal pressure. The linear buckling and plastic bifurcation buckling analyses are performed on the specimens tested by Galletly and Patel & Gill. The results are compared with the calculated results by program BOSOR5 and the experimental results. The difference in the buckling predictions of the deformation, modified flow and flow theories of plasticity is investigated.

Key Words: Torispherical shell, Internal pressure, Plastic bifurcation buckling, Finite element method

A 1. はじめに

球殻とトロイダル殻が結合されたトリスフェリカル殻が内圧を受ける場合、ナックル部には周方向圧縮応力が生じ、座屈の可能性がある。有限要素法の軸対称殻要素を用いた塑性分岐座屈解析手法を、トリスフェリカル殻の内圧座屈に適用した。

A 2. 解析手法

座屈前解析としては、軸対称変形に対する弾塑性大変形解析を行う。非線形解析手法としては増分法を用い、塑性理論としては流れ理論を採用する。

座屈解析においては、分岐座屈に伴う増分変位を周方向にフーリエ展開する。分岐座屈解析時の塑性理論としては、流れ理論、修正流れ理論、変形理論を採用する。

A 3. 解析結果

Galletly および Patel & Gill が実施したトリスフェリカル殻の内圧座屈試験に対応する解析を行った。解析は、線形座屈解析および塑性分岐座屈解析について実施した。解析結果の例を、Galletly No.6 および Patel & Gill 1DA について、BOSOR5 の結果および試験結果と比較して Table A1 に示す。この表における試験結果は、ナックル部に取り付けた変位計によるたわみ計測結果より求めた座屈発生圧力である。

A 4. まとめ

線形座屈と塑性分岐座屈、塑性分岐座屈解析時の塑性理論による差、解析結果と試験結果の対応についての知見を得た。

Table A1 Comparison of calculate and experimental buckling pressure

(a) Galletly

Specimen	Program	Calculated				Experimental
		Deformation theory	Modified flow theory	Flow theory	Linear buckling	
6	BOSOR5	0.648(26)	0.752(24)	—	—	0.69
	FEM	0.701(28)	0.847(19)	NB	1.876(44)	

(b) Patel & Gill

Specimen	Program	Calculated				Experimental
		Deformation theory	Modified flow theory	Flow theory	Linear buckling	
1DA	BOSOR5	0.26(75)	0.30(40)	—	—	0.272
	FEM	0.287(77)	0.337(39)	0.362(27)	0.635(40)	

Unit : N/mm² , () : No. of circumferential waves , NB : No buckling

1. 緒言

トリスフェリカル殻は、球殻とトロイダル殻が結合された構造であり、圧力容器の鏡板、低温貯蔵タンクの屋根などに使われている。1956年、カリフォルニアにおいて、直径15mの圧力容器の下部鏡板が水圧試験中に破壊した。この破壊の原因は脆性破壊であったが、これを契機として、トリスフェリカル殻の解析が行われ、その結果、内圧によりナックル部には周方向圧縮応力が生じ、座屈の可能性が有ることが示された⁽¹⁾。

トリスフェリカル殻の内圧座屈に関しては、実験および解析により研究が行われている。圧力容器鏡板などのトリスフェリカル殻の内圧座屈は、塑性域で生じることが多いことから、金属製試験体を用いた塑性座屈試験が多数実施されている。丸棒から削り出した小型試験体による試験が、Galletlyら^{(2),(3)}、Kirk & Gill⁽⁴⁾およびPatel & Gill⁽⁵⁾により行われ、また、プレス、溶接など実機に対応する製作方法により作られた試験体に関しては、Rocheら⁽⁶⁾およびMillerら⁽⁷⁾により行われている。トリスフェリカル殻の内圧座屈試験においては、座屈圧力をどのように定義するかが問題である。上記試験^{(3),(7)}においては、ナックル部に変位計を取り付け、たわみ分布を計測し、これにより座屈発生圧力を求め、また目視など複数の方法により座屈圧力を定義している⁽⁸⁾。

トリスフェリカル殻の内圧座屈の解析に関しては、主として差分法による軸対称殻プログラムBOSOR⁽⁹⁾により、試験と対応する塑性分岐座屈解析が行われ、試験結果との比較が行われている^{(3),(10),(11)}。プログラムBOSORにおいては、座屈前軸対称変形解析では大変形効果を考慮した弾塑性解析を行い、塑性分岐座屈解析時の塑性理論としては修正流れ理論、変形理論を採用している。

ここでは、有限要素法の軸対称殻要素を用い、塑性分岐座屈解析時の塑性理論として流れ理論、修正流れ理論、変形理論を採用したプログラムにより、公表されている試験に対応する解析を実施した。本解析結果とBOSOR5の解析結果、試験結果との比較、線形座屈解析と塑性分岐座屈解析の比較、分岐座屈解析の塑性理論の比較を行ったので報告する。

2. 解析方法

ここでは、軸対称殻が軸対称荷重を受ける場合を対象とするが、軸対称殻を図1に示す円錐台要素でモデル化する。

2.1 座屈前解析

座屈前解析としては、軸対称変形に対する弾塑性大変形解析を行う。非線形解析手法としては増分法を用い、塑性理論としては等方硬化を仮定し、流れ理論を採用する。仮想仕事の原理による平衡方程式は、

$$[K + K_d + K_\sigma]\{\Delta q\} = \{\Delta f\} + \{\Delta r\} \quad (1)$$

$[K]$: 接線剛性マトリックス

$[K_d]$: 初期変位マトリックス

Fig.1 Shell element

$[K_\sigma]$: 初期応力マトリックス

$\{\Delta f\}$: 等価節点力増分ベクトル

$\{\Delta r\}$: 不釣り合い力ベクトル

また、節点変位増分ベクトルは、

$$\{\Delta q\} = [\Delta \bar{u}_i \ \Delta \bar{w}_i \ \Delta \theta_i \ \Delta \bar{u}_j \ \Delta \bar{w}_j \ \Delta \theta_j]^T \quad (2)$$

解析は、各増分ごとに(1)式を解いて進める。

2.2 座屈解析

分岐座屈に伴う増分変位を θ のフーリエ級数に展開し、次のように表す (n : 展開次数)。

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= \sum_n \delta u^{(n)} \cos n\theta, \quad \delta v = \sum_n \delta v^{(n)} \sin n\theta \\ \delta w &= \sum_n \delta w^{(n)} \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

節点変位増分は、

$$\{\delta q\} = [\delta \bar{u}_i \ \delta \bar{v}_i \ \delta \bar{w}_i \ \delta \theta_i \ \delta \bar{u}_j \ \delta \bar{v}_j \ \delta \bar{w}_j \ \delta \theta_j]^T \quad (4)$$

応力増分—ひずみ増分関係を次式のように表す。

$$\{\Delta \sigma\} = [D]\{\Delta \epsilon\} \quad (5)$$

塑性理論としては、・流れ理論 ・変形理論 ・修正流れ理論を考える。

・流れ理論 弾性状態においては $[D] = [D^e]$ 、塑性状態においては $[D] = [D^e] + [D^p]$ であり、

$$[D^e] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[D^p] = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} S_1^2 & S_1 S_2 & 0 \\ S_1 S_2 & S_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma_s' + \nu \sigma_\theta') \quad , \quad S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \sigma_s' + \sigma_\theta') \\ S &= \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H' + (S_1 \sigma_s' + S_2 \sigma_\theta') \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$\bar{\sigma}$ は相当応力、 σ_s' 、 σ_θ' は偏差応力、 H' はひずみ硬化率である。

・変形理論^{(9),(12)}

$$[D] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= \frac{c_s}{a_s c_s - b_s^2}, E_{12} = \frac{-b_s}{a_s c_s - b_s^2} \\ E_{22} &= \frac{a_s}{a_s c_s - b_s^2}, E_{33} = \frac{E}{2(1+\nu+g)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} a_s &= a + g' \sigma_s'^2 / E, b_s = b + g' \sigma_s' \sigma_\theta' / E \\ c_s &= a + g' \sigma_\theta'^2 / E \\ a &= 1/E_s, b = -(\nu + g/3)/E \\ g' &= \frac{9}{4} \left(\frac{E}{E_T} - \frac{E}{E_s} \right) / (\sigma_s'^2 + \sigma_\theta'^2 - \sigma_s' \sigma_\theta') \\ g &= \frac{3}{2} \left(\frac{E}{E_s} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

E_s は割線係数、 E_T は接線係数である。

・修正流れ理論^{(9),(12)} 流れ理論による解析を変形理論による解析に近づけるために、流れ理論の応力-ひずみ関係のせん断項に変形理論のせん断項を取り入れたものである。弾性状態では、(6)式で与えられる $[D] = [D^e]$ を用い、塑性状態では $[D] = [D^e] + [D^p]$ として、 $[D^p]$ は(7)式で与えられるが、 $[D^e]$ は塑性状態では以下の様にする。

$$[D^e] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{2(1+\nu+g)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

仮想仕事の原理より、座屈条件式として次式が得られる。ただし、座屈条件式は展開次数 n 毎に独立した式となる。

$$\left| [K^{(n)}] + [K_d^{(n)}] + [K_\sigma^{(n)}] + \lambda^{(n)} ([\Delta K_d^{(n)}] + [\Delta K_\sigma^{(n)}]) \right| = 0 \quad (12)$$

展開次数 n を変化させて固有値 $\lambda^{(n)}$ を計算し、最小固有値が $0 < \lambda_{\min}^{(n)} \leq 1$ を満たした時に、この増分内で座屈することになる。最小固有値により座屈荷重、対応する n により周方向座屈波数が求められる。なお、増分の第1ステップが線形座屈解析に対応する。

3. 解析結果

ここでは、Galletly⁽³⁾、および Patel & Gill⁽⁵⁾ が実施したトリスフェリカル殻の内圧座屈試験に対応する解析を行った。トリスフェリカル殻の形状を図2に、解析対象の寸法を表1および表2に示す。Galletly の試験体は鋼製、Patel & Gill の試験体はアルミ合金製である。解析に用いたヤング率、ポアソン比、降伏応力を表3に示す。なお、鋼の場合は弾完全塑性体、アルミ合金は加工硬化を考慮した。

3.1 線形座屈解析

Galletly No.6 および Patel & Gill 1DA 試験体について、要素数を 25~150 と変化させて線形座屈解析を実施した。各部位の要素数は次の通りである。

Fig. 2 Torispherical shell

Table 1 Specimen dimensions (Galletly)

Specimen	D	Rs	r	L	t
1	203	203	30.45	60.15	0.498
2	203	203	30.45	60.15	0.393
3	203	203	30.45	60.15	0.347
4	203	203	40.6	60.15	0.42
5	203	203	40.6	60.15	0.355
6	203	203	40.6	60.15	0.268

Unit: mm

Table 2 Specimen dimensions (Patel & Gill)

Specimen	D	Rs	r	L	t
1DA	135	135	7.62	35	0.2134
2DA	135	135	10.16	35	0.2578
3DA	135	135	12.7	35	0.2459
4DA	135	135	15.24	35	0.2388
5DA	135	135	17.78	35	0.2578
6DA	135	135	20.32	35	0.2845
7DA	135	135	22.86	35	0.2362
8DA	135	135	25.4	35	0.2096
9DA	135	135	27.94	35	0.238
10DA	135	135	30.48	35	0.3175

Unit: mm

Table 3 Mechanical properties

Material	Young's modulus	Poisson's ratio	Yield stress
	[N/mm ²]	[-]	[N/mm ²]
Mild steel	207000	0.28	303.5
Aluminum alloy	78877	0.33	253

	円筒部	ナックル部	球殻部
25 要素	7	8	10
50 要素	15	15	20
100 要素	30	30	40
150 要素	45	45	60

解析結果を表4に示す。展開次数 n を変化させた結果であり、太字示した数値が座屈圧力、対応する n が周方向座屈波数である。要素数と座屈圧力の関係を図3に示す。図中の数字は座屈波数である。この図より、50～100要素でほぼ収束した解が得られることがわかる。図4および図5に、100要素による座屈モードを示す。座屈は、球殻とナックル部の接合部近傍に生じている。

Fig.3 Buckling pressure versus number of elements

Fig.4 Linear buckling mode (Gill No.6)

Fig.5 Linear buckling mode (Patel & Gill IDA)

3.2 塑性分岐座屈解析

塑性分岐座屈解析は50要素で実施した。解析結果を、BORSOR5の結果^{(3),(11)}および試験結果^{(3),(5)}と比較して表5 (Galletly) および表6 (Patel & Gill)に示す。表5および表6における試験の座屈圧力 $P_1 \sim P_3$ は、それぞれ以下のよう

表5 P_1 : 変位計によるナックル部のたわみ計測結果より求めた座屈発生圧力

P_2 : 最大たわみ-内圧関係より求めた数値
 P_3 : 目視

表6 P_1 : 変位計によるナックル部のたわみ計測結果より求めた座屈発生圧力

P_2 : 試験体表面の手による感触
 P_3 : 最初の座屈ピークが成長

表5および表6より、本解析結果とBORSOR5の結果は、座屈圧力、周方向座屈波数ともにほぼ対応していること、変形理論による解析結果は、試験における座屈発生圧力 P_1 に対応していることがわかる。また、変形理論、修正流れ理論、流れ理論の順で座屈圧力が大きくなること、変形理論以外は、試験で座屈が生じた場合でも座屈しない予測することがあるなど、不安全側であることがわかる。

Fig.6 Nonlinear buckling mode (Gill No.6)

Fig.7 Nonlinear buckling mode (Patel & Gill IDA)

図6および図7に、Galletly No.6 および Patel & Gill 1DA の座屈モードを示す。図4および図5との比較より、塑性分岐座屈の場合、座屈モードのピークが若干ナックル部内へ移動すること、また、周方向座屈波数は線形座屈と塑性分岐座屈で異なることがわかる。なお、塑性分岐座屈は、線形座屈圧力よりも低い圧力で生じる。

4. 結言

有限要素法の軸対称殻要素を用いた塑性分岐座屈解析手法を、トリスフェリカル殻の内圧座屈に適用した。分岐座屈解析時の塑性理論としては、流れ理論、修正流れ理論、変形理論を採用した。Galletly および Patel & Gill の試験に対応する線形座屈解析、塑性分岐座屈解析を実施し、BOSOR5 の結果および試験結果と比較した。

座屈は球殻とナックル部の接合部近傍で生じるが、塑性分岐座屈の座屈モードのピークは、線形座屈の場合よりはナックル部内となる、周方向座屈波数は、線形座屈解析と塑性分岐座屈解析で異なり、座屈圧力は塑性分岐座屈解析の方が線形座屈解析よりも低い。

分岐座屈時の塑性理論に関しては、変形理論、修正流れ理論、流れ理論の順で大きくなる。変形理論による座屈圧力は、試験による座屈発生圧力と対応し、修正流れ理論、流れ理論による座屈圧力は不安全側となることがある。

本解析結果と BOSOR5 の結果は、座屈圧力、周方向座屈波数ともにほぼ対応している。

文 献

(1) Galletly, GD., J. Eng. Indust., Vol.81, 1959, p.51.
(2) Galletly, GD., Stability of steel structures, 1977, p.619.
(3) Galletly, GD. et al, Proc. Instn. Mech. Engrs., Part C, Vol.204, 1990, p.169
(4) Kirk, A. & Gill, SS., Int. J. Mech. Sci., Vol.17,1975, p.525.
(5) Patel, PR. & Gill, SS., Int. J. Mech. Sci., Vol.20, 1978, p.159.
(6) Roche, RL. & Autrusson, B., J. Press. Vess. Technol., Vol.108, 1986, p.138.
(7) Miller, CD. et al, Int. J. Press. Vess. & Piping, Vol.22, 1986, p.147.
(8) Singer, J. et al, Buckling experiments: experimental methods in buckling of thin-walled structures, Vol.2, 2002.
(9) Bushnell, D., Int. J. Solids Struct., Vol.10, 1974, p.1287.
(10) Bushnell, D. & Galletly, GD., J. Press. Vess. Technol. Vol.99, 1977, p.39.
(11) Lagae, G. & Bushnell, D., Nucl. Engng. Design, Vol.48, 1978, p.405.
(12) 宮崎則幸 他, 機論(A), Vol.54, 1988, p.794.

Table 4 Results of linear buckling analysis
(a) Galletly No.6

Number of elements	n						
	41	42	43	44	45	46	47
25	2.2738	2.2653	2.2604	2.2588	2.2604	2.2648	2.272
50	1.9558	1.9466	1.9408	1.9384	1.939	1.9424	1.9486
100	1.8944	1.8847	1.8785	1.8755	1.8757	1.8787	1.8845
150	1.8697	1.8599	1.8537	1.8507	1.8508	1.8539	1.8597

Unit: N/mm²

(b) Patel & Gill 1DA

Number of elements	n						
	37	38	39	40	41	42	43
25	0.6816	0.6804	0.6803	0.681	0.6825	0.6848	0.6877
50	0.6503	0.6485	0.6476	0.6475	0.6482	0.6496	0.6516
100	0.6378	0.6359	0.6349	0.6348	0.6354	0.6368	0.6387
150	0.6331	0.6314	0.6308	0.631	0.6319	0.6335	0.6357

Unit: N/mm²

Table 5 Comparison of calculated and experimental buckling pressures (Galletly)

Specimen	Program	Calculated			Experimental		
		Deformation theory	Modified flow theory	Flow theory	P ₁	P ₂	P ₃
1	BOSOR5	1.110(26)	NB	—	0.966	0.814	NB
	FEM	1.141(23)	NB	NB			
2	BOSOR5	0.797(29)	NB	—	0.759	0.699	1.035
	FEM	0.817(27)	NB	NB			
3	BOSOR5	0.666(32)	0.862(22)	—	0.586	0.559	0.759
	FEM	0.706(32)	0.914(17)	NB			
4	BOSOR5	1.262(21)	NB	—	0.931	0.897	NB
	FEM	1.317(19)	NB	NB			
5	BOSOR5	0.986(22)	NB	—	0.828	0.759	1.207
	FEM	0.946(21)	1.199(16)	NB			
6	BOSOR5	0.648(26)	0.752(24)	—	0.69	0.607	0.793
	FEM	0.701(28)	0.847(19)	NB			

Unit : N/mm² , () : No. of circumferential waves , NB : No buckling

Table 6 Comparison of calculated and experimental buckling pressures (Patel & Gill)

Specimen	Program	Calculated			Experimental		
		Deformation theory	Modified flow theory	Flow theory	P ₁	P ₂	P ₃
1DA	BOSOR5	0.26(75)	0.30(40)	—	0.272	0.296	0.31
	FEM	0.287(77)	0.337(39)	0.362(27)			
2DA	BOSOR5	0.40(55)	0.47(40)	—	0.402	0.521	0.586
	FEM	0.426(47)	0.526(29)	0.602(24)			
3DA	BOSOR5	0.41(50)	0.47(40)	—	0.445	0.476	0.552
	FEM	0.434(50)	0.546(29)	0.583(27)			
4DA	BOSOR5	0.45(45)	0.48(40)	—	0.479	0.512	0.552
	FEM	0.471(46)	0.564(35)	0.596(35)			
5DA	BOSOR5	0.58(35)	0.61(30)	—	0.615	0.71	0.758
	FEM	0.605(36)	0.707(28)	0.737(26)			
6DA	BOSOR5	0.77(35)	0.85(35)	—	0.717	0.869	0.965
	FEM	0.796(32)	0.955(25)	NB			
7DA	BOSOR5	0.68(35)	0.72(35)	—	0.81	0.862	0.862
	FEM	0.703(33)	0.790(28)	0.833(22)			
8DA	BOSOR5	0.67(35)	0.69(30)	—	0.684	0.79	0.827
	FEM	0.687(32)	0.768(27)	0.808(25)			
9DA	BOSOR5	0.96(25)	1.00(20)	—	NB	NB	NB
	FEM	0.990(26)	NB	NB			
10DA	BOSOR5	NB	NB	—	NB	NB	NB
	FEM	NB	NB	NB			

Unit: N/mm² , () : No. of circumferential waves , NB : No buckling