538 非線形ばねで拘束された両端単純支持はりの定常振動解析

Analysis of Steady Vibration in Simply-Supported Beam Held by a Clamped Nonlinear Spring

○学 相原建人 (首都大院) 正 熊野博之 (首都大)

Tatsuhito AIHARA, Hiroyuki KUMANO

Tokyo Metropolitan University, 1-1, Minami-Osawa, Hachioji, Tokyo, 192-0397 Japan

This paper deals with the response analysis of nonlinear vibration in continuous system excited by periodic displacement with arbitrary functions. A system of steady vibration in a simply-supported beam held by a nonlinear spring at midpoint of span is considered. The restoring force is assumed to be a piecewise-linear system. For such a system, the beam undergoes a nonlinear vibration when the amplitude is large. In order to analyze the main resonance for the system, the Fourier series method is applied to obtain an exact solution for response vibration. The numerical calculation is performed to obtain the resonance curves. The numerical results show effects of the stiffness of attached spring and the amplitude of excitation on the resonance curves. The experiments are also performed to verify the numerical results.

Key Words: Theory of Vibration, Vibration of Continuous System, Method of Vibration Analysis, Nonlinear Vibration, Simply-Supported Beam, Resonance Curve, Main Resonance

A1. 緒言 本稿は、はりスパンの途中において非線形ばねで拘束された両端単純支持はりの横曲げ振動系に変位周期関数励振が作用する定常応答振動を解析する。解析は系にフーリエ級数解法を適用し、応答振動の厳密解を導出する。ついで解析結果に基づいて数値計算を行い、主共振域における応答振動波形を求め、共振曲線を作成し、これらに及ぼす諸因子の影響を明らかにする。さらに、本解析モデルに対応する実験を行い、数値計算結果と実験結果はかなりよく一致することを示す。

A2. 理論解析 取扱う系はFig.A1に示すようにはりスパン中央において非線形付加ばねで拘束（ピン支持）された両端単純支持はりの横曲げ振動系を考え、これに任意周期関数の変位励振が作用するときの応答振動を解析する。はり断面面積を A 、断面 2 次モーメントを I 、縦弾性係数を E 、密度を ρ とすれば、この系の運動方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \dots\dots(A1)$$

非線形付加ばね（ばね定数が K ）で拘束されたはりスパン中央の復元力は Fig.A2 の破線で表されるが、これを近似的に実線で示すように $z_{l/2} = \pm e_0$ を境に折線関数（ばね定数が K_1, K_1+K_2 ）で表される対称断片線形特性を持つものとする。式 (A1) において非線形域における復元力の非線形部分を複素フーリエ級数で展開して運動方程式を形式的に線形化し、主共振域において出現する応答振動の厳密解を導出する。ついで数値計算を行い、主共振域における応答振動を求め、共振曲線および位相角曲線を作成する。

A3. 数値計算結果と実験結果の比較 Fig.A3 は数値計算結果と実験結果を比較した共振曲線を示すが、計算値と実験値はかなりよく一致している。はりスパン中央における最大応答変位が Fig.A2 の折線で近似した非線形域 ($z_{l/2} \leq -e_0$, $e_0 \leq z_{l/2}$) へ突入すると、共振曲線は大きく右傾化し、実験値は往路と復路において跳躍現象が発生する。数値計算例では付加ばねの非線形性および励振振幅比をそれぞれパラメータにとった共振曲線および位相角曲線を作成した。

A4. 結言 本解析ははりスパン中央に非線形付加ばねで拘束された両端単純支持はりが変位周期関数励振を受けたとき、系にフーリエ級数解法を適用し、応答振動の厳密解を解析した。ついで解析結果に基づいて数値計算を行い、共振曲線および位相遅れ角曲線を作成し、これらに及ぼす諸因子の影響を数値的に明らかにした。さらに得られた解析結果を検証するため実験を行い、計算結果と実験結果はかなりよく一致することを示し、本解析の有効性を検証した。

Fig. A1 Analytical model for nonlinear vibration system in simply-supported beam having a nonlinear spring at center of midspan

Fig. A2 Characteristics of restoring force

$\{q(t) = \cos \omega t, K_1/k = 1.0, K_2/k = 5.0, f_1/e_1 = 0.1\}$
Fig. A3 Resonance curve for comparing numerical results with experimental ones

1. 緒言

化学プラントの配管系のような長大な構造部材では配管支点間においてばね支持して簡易的に制振するような構造物が数多く見受けられる。構造部材の非線形性と付加ばねの拘束による復元力の大きさを考慮した体系的な解析研究は必ずしも十分にされていないようである。このような付加ばねや支持部のがたに起因する連続体の非線形振動系に関する研究は実用上の重要性から数多くなされている^{(1)~(6)}。しかし、連続体に関する研究は従来より有限要素法^{(7)~(8)}により解析されているが、計算時間やコストの面で必ずしも最良の方法ではない^{(6)~(7)}。一方、解析的方法是厳密な解が得られれば、共振に及ぼす諸因子の影響が明確であり、見通しのよい解が得られる^{(1)~(3)}。

そこで、本研究では連続体の一例として、はりスパン途中において非線形付加ばねで拘束された単純両端支持はりモデルを考え、復元力を対称断片線形特性に近似した横曲げ振動系に、変位による任意周期関数励振が作用したときの定常振動を解析する。解析ははりの最大振幅位置において、付加ばねの拘束による復元力が有限の値を持つものと仮定し、これを級数展開するフーリエ級数解法を適用し、応答振動の厳密解を導出する。ついで、解析結果に基づいて数値計算を行い、主共振域における応答振動波形を求め、付加ばねの非線形性および励振振幅比をパラメータにとった共振曲線を作成する。さらに、本解析モデルに対応する実験を行い、数値計算結果と実験結果はかなりよく一致することを示す。

2. 理論解析

2.1 系の特性と運動方程式 取扱う系は Fig.1 に示すようにはりスパン中央に非線形付加ばね（ピン支持）が取付けられた両端単純支持はりの横曲げ振動系を考え、これに変位周期励振が作用する定常振動である。はりの復元力は Fig.2 に示すようであり、破線は非線形付加ばね（ばね定数 K ）の特性である。この破線を実線のように $z_{l/2} = \pm e_0$ を境にばね定数が K_1 と K_1+K_2 の線形ばねを組合せた対称断片線形系に近似することにより解析する。この断片線形の評価方法は直線に近似したとき、直線に対する破線で囲まれる外側の面積と内側の面積が等しくなるようにとる。

いま Fig.2 の実線は領域Ⅱを規準にとると、系全体から見れば領域Ⅰ、Ⅲは非線形な領域と考えられる。復元力は線形領域を挟んだ対称断片線形特性で表され、線形領域のばね定数は K_1 、非線形領域のそれは K_1+K_2 である。

はりの材質は均質等方とし、断面積を A 、断面 2 次モーメントを I 、縦弾性係数を E 、単位体積あたりの質量を ρ とすれば、この系の運動方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \text{.....(1)}$$

Fig. 1 Analytical model for nonlinear vibration system of simply-supported beam having a nonlinear spring at center of midspan

系に作用する変位励振を $q(t)$ とし、基礎に対するはりの相対変位を z とすると、絶対変位 y は次式のように表される。

$$y = z + q(t) \quad \text{.....(2)}$$

式(2)を用いて、 z に関する運動方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} \quad \text{.....(3)}$$

2.2 フーリエ級数解法 系に作用する変位励振 $q(t)$ は任意周期関数とし、次式のように複素フーリエ級数で展開する。

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{jn\omega t} = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\omega t + g_n \sin n\omega t) \quad \text{.....(4)}$$

ここに ω は円振動数である。式(4)を式(3)に代入し、次の偏微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \omega^2 s_n e^{jn\omega t} \quad \text{.....(5)}$$

いま本解析は主共振域における定常振動を考えているので、はりスパン中央における位置の応答振動波形は励振と同じ振動数の周期関数となり、次式のように仮定する。

$$z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n(x) e^{jn\omega t}, \quad y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n(x) e^{jn\omega t} \quad \text{.....(6)}$$

式(6)を式(2)に代入すると、次式の関係が得られる。

$$W_n(x) = X_n(x) - s_n \quad \text{.....(7)}$$

また、式(6)、(7)を式(5)に代入するとはりの変形に関する常微分方程式となり、次式となる。

$$\frac{d^4}{dx^4} X_n(x) = n^2 \omega^2 \frac{\rho A}{EI} X_n(x) \quad \text{.....(8)}$$

このとき、式(8)の係数を、

$$\lambda_n^4 = n^2 \omega^2 \frac{\rho A}{EI} \quad \text{.....(9)}$$

とおけば、 λ_n は固有値であり、 $X_n(x)$ 、($n=0,1,2,\dots$)は形式的に次式となる。

$$\left. \begin{aligned} X_0(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ X_n(x) &= A_n \cosh \lambda_n x + B_n \sinh \lambda_n x + C_n \cos \lambda_n x + D_n \sin \lambda_n x \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(10)}$$

ここに、 $a, b, c, d, A_n, B_n, C_n, D_n$ はそれぞれ境界条件から決定される未定定数である。また、両端支持はりの固有円振動数 ω_1 は次式で表される。

$$\omega_1 = \frac{Z_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad Z_1 = \pi \quad \text{.....(11)}$$

振動数比 $\Omega (= \omega/\omega_1)$ を式(9)へ導入すれば、次の関係式が成立つ。

$$\lambda_n^4 l^4 = Z_1^4 n^2 \Omega^2 \quad \text{.....(12)}$$

Fig. 2 Characteristics of restoring force

Fig.3 Harmonic resonance vibration

本解析では、主共振域において出現する1周期の間に上下の非線形域にそれぞれ1度だけ滞留するような応答波形に限定して議論する。Fig.1に示された励振とはりに生じる応答およびばね定数 K_2 による復元力の調和共振解をFig.3のように仮定する。このときより中央における相対変位 $z_{l/2}$ の応答振動は周期的と考えられ、Fig.2に示した領域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲに滞留する区間にそれぞれ対応させ、区間Ⅰ、Ⅱ、Ⅲの三つに分割される。Fig.3(a)において位相角 θ の原点を基本波(破線)の頂点にとり、独立変数を時間 t から位相角 θ に変換し、 θ を次式のように選ぶ。

$$\theta = \omega t - \alpha \quad \text{.....(13)}$$

ここに、 α は後に決定される当面未定の位相遅れ角であり、このとき変位は次式のように表される。

$$z(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{X_n(x) - s_n\} e^{jn(\theta+\alpha)} \quad \text{.....(14)}$$

より中央における応答振動の振幅が非線形域に滞留している区間は Fig.3(b)に示すように位相角 θ で測って区間Ⅰ、Ⅲを θ_0 とすると、これは非線形域に滞留する位相角である。このとき相対変位と位相角の関係、すなわち切替条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta = \pm \frac{\theta_0}{2} & : z_{l/2} = e_0 \\ \theta = \pi \pm \frac{\theta_0}{2} & : z_{l/2} = -e_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(15)}$$

一方、Fig.1の解析モデルにおける境界条件は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} x=0 : z=0, \quad x=0 : \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0 \\ x=\frac{l}{2} : \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \quad x=\frac{l}{2} : 2EI \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f(z_{l/2}) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(16)}$$

ここに $f(z_{l/2})$ は非線形付加ばねによる復元力であり、Fig.2に示すような復元力特性を有するので、これらはそれぞれの区間において次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} f(z_{l/2}) &= K_1 z_{l/2} + K_2 (z_{l/2} - e_0) : -\frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_0}{2} & : \text{Interval I} \\ f(z_{l/2}) &= K_1 z_{l/2} : \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\theta_0}{2}, & \\ & \pi + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\theta_0}{2} & : \text{Interval II} \\ f(z_{l/2}) &= K_1 z_{l/2} + K_2 (z_{l/2} + e_0) : \pi - \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \pi + \frac{\theta_0}{2} & : \text{Interval III} \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(17)}$$

また、Fig.3(c)に示す復元力の非線形部分 $g(\theta)$ の周期は応答振動波形と等しいものと考えられ、次式のようにフーリエ級数に展開する。

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad \text{.....(18)}$$

2.3 解析式の導出 ここでは前節の切替条件および境界条件を用いて応答振動を求める解析式を導出する。応答波形の式(14)へ切替条件の式(15)および境界条件の式(16)を導入し、式(18)を用いて運動方程式は形式的に線形化され、無次元化したより中央の応答変位比 $z_{l/2}/e_0$ は次式のように導出される。

$$\frac{z_{l/2}}{e_0} = 1 + \frac{\cos \theta - \cos \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \left\{ \left(N_n u_n \frac{1-M_1 x_1}{N_1} + M_n x_n \right) \left(\cos n\theta - \cos \frac{n\theta_0}{2} \right) + \left(N_n v_n \frac{1-M_1 x_1}{N_1} + M_n y_n \right) \left(\sin n\theta - \frac{\sin \frac{n\theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} \sin \theta \right) \right\}}{\cos \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \left(N_n u_n \frac{1-M_1 x_1}{N_1} + M_n x_n \right) \cos \frac{n\theta_0}{2}} \quad \text{..... (19)}$$

さらに、応答変位が式(19)で表されるとき、相応する励振振幅比 f_1/e_0 は次式のように導出される。

$$\frac{f_1}{e_0} = \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ \frac{\frac{1-M_1 x_1}{N_1}}{\cos \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \left(N_n u_n \frac{1-M_1 x_1}{N_1} - M_n x_n \right) \cos \frac{n\theta_0}{2}} \right\} \quad \text{..... (20)}$$

また、励振に対する応答の位相遅れ角 α は次式のようになる。

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\frac{\left\{ M_1 y_1 + \sum_{n=3,5,7,\dots} \left(N_n v_n \frac{1-M_1 x_1}{N_1} + M_n \bar{y}_n \right) \frac{\sin \frac{n\theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} \right\}}{(1-M_1 x_1)} \right] \dots\dots\dots (21)$$

ここに、以上の式(19)～(21)において簡単化のため、次式のような無次元量および係数を導入した。

$$\left. \begin{aligned} x_n &= a_n / (k\Gamma), \quad y_n = b_n / (k\Gamma), \quad k = 48 EI / l^3, \quad \Omega = \omega / \omega_1, \quad \kappa = K_1 / k \\ N_n &= N_n = \frac{1}{\Delta_n} \left\{ \left(\cosh \frac{\lambda_n l}{2} \sin \frac{\lambda_n l}{2} - \cos \frac{\lambda_n l}{2} \sinh \frac{\lambda_n l}{2} \right) \kappa \frac{24}{l^3 \lambda_n^3} + \cosh \frac{\lambda_n l}{2} + \cos \frac{\lambda_n l}{2} \right\} - 1, \\ M_n &= \frac{24}{\lambda_n^3 l^3 \Delta_n} \left(\sinh \frac{\lambda_n l}{2} \cos \frac{\lambda_n l}{2} - \cosh \frac{\lambda_n l}{2} \sin \frac{\lambda_n l}{2} \right), \\ \Delta_n &= \left(\cosh \frac{\lambda_n l}{2} \sin \frac{\lambda_n l}{2} - \cos \frac{\lambda_n l}{2} \sinh \frac{\lambda_n l}{2} \right) \kappa \frac{24}{l^3 \lambda_n^3} + 2 \cosh \frac{\lambda_n l}{2} \cos \frac{\lambda_n l}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

また、無次元フーリエ係数 x_n, y_n の式中において導入された応答基本波の余弦部分の振幅比 Γ / e_0 は次式で表される。

$$\frac{\Gamma}{e_0} = \left[\cos \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=3,5,7,\dots} \left(N_n u_n \frac{1-M_1 x_1}{N_1} + M_n x_n \right) \cos \frac{n\theta_0}{2} \right]^{-1} \dots\dots\dots (23)$$

さらに無次元化された復元力の非線形部分は式(18)に無次元フーリエ係数 x_n, y_n を導入し、次式で表される。

$$\frac{g(\theta)}{k\Gamma} = \sum_{n=1,3,5,\dots} (x_n \cos n\theta + y_n \sin n\theta) \dots\dots\dots (24)$$

以上の解析から得られた諸式、式(19)～(24)はすべて振動数比 Ω 、位相遅れ角 α 、および領域 I、III への滞留位相角 θ_0 の三つのパラメータのほかに、独立した無次元フーリエ係数 $x_n, y_n (n=1,2,3,\dots)$ で表されたことになる。したがってこれらの式に含まれる x_n, y_n が得られれば、応答振動が求められる。すなわち、物理的順序とは逆転するが、応答変位は式(19)から求められ、そのときの相応する励振は式(20)から、復元力の非線形部分は式(24)から、位相遅れ角 α は式(21)からそれぞれ得られる。

2.4 無次元係数の決定 無次元係数 x_n, y_n は式(22)によって定義され、復元力の非線形部分をフーリエ級数に展開したときに導入された未定係数であるので、復元力の断片線形特性を満足するように決定されなければならない。この条件より、次の無限連立一次方程式が得られる。

$$x_m - \sum_{n=3,5,7,\dots} (A_{mn} x_n - B_{mn} x_1) = I_m + \sum_{n=3,5,7,\dots} I_{mn}, \quad (m=0,1,2,\dots) \dots\dots\dots (25)$$

$$y_m - \sum_{n=3,5,7,\dots} (C_{mn} y_n - D_{mn} x_1) = J_m + \sum_{n=3,5,7,\dots} J_{mn}, \quad (m=0,1,2,\dots) \dots\dots\dots (26)$$

したがって式(25)、(26)を連立させて解くことにより、 x_n, y_n が決定される。なお、式中の係数 $A_{mn}, B_{mn}, \dots, J_{mn}$ などは、 Ω, α, θ_0 をパラメータとして決定される定数項であり、それぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} &= \frac{K}{k} \cdot \frac{\theta_0}{\pi} M_n \left(\frac{\sin \frac{m+n}{2} \theta_0}{\frac{m+n}{2} \theta_0} + \frac{\sin \frac{m-n}{2} \theta_0}{\frac{m-n}{2} \theta_0} - 2 \cos \frac{n\theta_0}{2} \cdot \frac{\sin \frac{m}{2} \theta_0}{\frac{m}{2} \theta_0} \right) \\ I_m &= \frac{K}{k} \cdot \frac{\theta_0}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{m+1}{2} \theta_0}{\frac{m+1}{2} \theta_0} + \frac{\sin \frac{m-1}{2} \theta_0}{\frac{m-1}{2} \theta_0} - 2 \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot \frac{\sin \frac{m}{2} \theta_0}{\frac{m}{2} \theta_0} \right) \\ C_{mn} &= \frac{K}{k} \cdot \frac{\theta_0}{\pi} M_n \left\{ \frac{\sin \frac{m-n}{2} \theta_0}{\frac{m-n}{2} \theta_0} - \frac{\sin \frac{m+n}{2} \theta_0}{\frac{m+n}{2} \theta_0} - \frac{\sin \frac{n}{2} \theta_0}{\sin \frac{1}{2} \theta_0} \left(\frac{\sin \frac{m-1}{2} \theta_0}{\frac{m-1}{2} \theta_0} - \frac{\sin \frac{m+1}{2} \theta_0}{\frac{m+1}{2} \theta_0} \right) \right\} \\ I_{mn} &= \frac{N_n}{N_1} \cdot \frac{u'_n}{M_n} A_{mn}, \quad B_{mn} = M_1 I_{mn}, \quad J_{mn} = \frac{N_n}{N_1} \cdot \frac{v'_n}{M_n} C_{mn}, \quad D_{mn} = M_1 J_{mn} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

3. 実験装置および実験方法

本研究は解析結果を検証するため、Fig.1 の解析モデルに対応する実験装置を設計製作して実験を行った。運動方程式の式(3)に対応するはりの定常振動の実験装置の概略図を Fig.4 に、実験に用いた供試はりとはばねの諸元を Table 1 にそれぞれ示す。供試はり(板厚が 0.5mm、板幅が 12.8mm)の材質はばね鋼である。実験は系全体のばね定数を断片線形系で近似したため、これを模擬してはりに拘束された線形付加ばね④と間隙 e_0 をとった被衝突線形ばね⑤を並列に設置し、系全体

のばね定数が折れ線特性になるようにした。

実験装置の概要(Fig.4)はフレーム⑦に固定された付加ばね④で弾性的に拘束されたはり③が単純支持され、かつ非線形域における被衝突ばね⑤(コイルばね)は対称の間隙 e_0 をとり、フレーム⑦に固定されている。励振によりはりに応答振動が発生し、はり中央における振幅が間隙 e_0 を超えたとき、はりは被衝突ばね⑤へ弾性衝突する。このとき、変位入力励振はリニア・ボールベアリングを介して基礎⑥上に置かれたフレーム⑦を撓動させることにより、はり③には変位周期励

振が作用する。基礎⑥に固定された加振機①は連接軸②によりフレーム⑦に連結されている。加振機①により入力される変位励振は振動数計⑫に接続されたファンクション・ジェネレータ⑧により制御されている。なお振動時の床面とフレーム⑦との摩擦の影響は小さく、無視できる。励振変位は基礎⑥に設置されたレーザ式変位センサ⑨、応答変位はフレーム⑦に設置されたレーザ式変位センサ⑩でそれぞれ変位を検出し、そのアナログ出力をアナライジング・レコーダ⑪により記録させる。

4. 数値結果および実験結果

解析結果と実験結果を比較するため、数値計算は Table 1 に示す実験に用いた試験片の諸元に対応させている。なお、数値計算における式(25)、(26)の無限連立方程式および無次元フーリエ級数の項数は $n, m=40$ 項までとった近似計算としたが、収束性は十分である。

4.1 数値計算結果と実験結果との比較 Fig.5は数値計算結果と実験結果を比較した共振曲線を示すが、両結果はかなりよく一致している。はりスパン中央の最大振幅が非線形域に突入(記号●)すると、共振曲線は右傾化して大きな非線形挙動を示す。共振曲線の実験値(記号○)は、振動数の上昇時は振動数比 $\Omega \simeq 1.69$ よりも高くなると下側の線形振動へ飛び移る跳躍現象が発生し、それ以上大きな振動数比(Ω)の非線形域における実験値は得られない。これは本解析では減衰を考慮していないが、実際には供試はりは空気抵抗、材料の内部摩擦およびはり支持部の抵抗による減衰が働くためと推測される。逆に、振動数を降下させた場合は振動数比 $\Omega \simeq 1.58$ の近傍において、上側の共振曲線へ跳躍現象が確認された。これらの現象は非線形振動ではよく知られているように、共振曲線の背骨曲線の傾きが負の不安定分枝(破線)であり、実験値は得られない。これは通常の漸硬ばねの場合と同様の現象である。なお共振曲線の不安定域の厳密な判別は安定判別解析が必要である。これについては著者らによって Hill の方程式を用いてすでに一部は検討しているが、続報としたい。

Fig.6, Fig.7 は、Fig.5 の共振曲線上(A)、(B)点における励振波形 $q(\theta)$ 、応答変位比波形 $z_{1/2}(\theta)/e_0$ および非線形域における復元力波形 $g(\theta)/k\Gamma$ の実験値と計算値をそれぞれ示す。これらの値の振幅は実験値と計算値はかなりよく一致しているが、実験値では励振 $q(\theta)$ に対する応答変位波形 $z_{1/2}(\theta)/e_0$ の位相遅れ角が計算値と比較して約 60° 程度の差異が生じている。これらは実験値では付加ばねの復元力に時間遅れの影響が考えられるが、理論解析では式(1)の運動方程式において、これを考慮していないためと推測される。

Fig. 4 Sketch of experimental apparatus

Table 1 Mechanical properties of parts used in experiment

	Symbol	Numeric value
Beam length	l	410 [mm]
Cross section of beam	A	6.4 [mm ²]
Beam mass	m	20.63 [g]
Beam density	ρ	7.89×10^3 [kg/m ³]
Second moment of area for beam	I	0.133 [mm ⁴]
Young's modulus of beam	E	177 [GPa]
Spring constant of beam	k	16.37 [N/m]
Natural angular frequency for beam	ω_1	40.13 [rad/s]
Collision gap	e_0	5.0 [mm]
Clamped spring constant	K_1	18.76 [N/m]
	K_2	81.34 [N/m]
Exciting vibration	$q(t)$	$\cos \omega t$

Fig. 5 Resonance curve for comparing numerical results with experimental ones

(a) Experimental result

(b) Numerical result

Fig. 6 Each waveform of point (A) in Fig. 6 ($\Omega=1.37$)

(a) Experimental result

(b) Numerical result

Fig. 7 Each waveform of point (B) in Fig. 6 ($\Omega=1.62$)

$$\{q(t) = \cos \omega t + 0.3 \sin 3\omega t, K_1/k = 1.0, f_1/e_0 = 0.1\}$$

Fig. 8 Resonance curves in the case where spring constant ratio K_2/k is held parameter

$$\{q(t) = \cos \omega t + 0.3 \sin 3\omega t, K_1/k = 1.0, K_2/k = 1.0\}$$

Fig. 9 Resonance curves in the case where spring constant ratio f_1/e_0 is held parameter

4.2 数値計算例 本解析結果に基づいて数値計算を行い、主共振域における定常振動の周期解を求めた。この場合、励振は任意周期関数励振の一例として、次式で表される合成波(奇関数)が作用する場合について行った。

$$q(t) = \cos \omega t + 0.3 \sin 3\omega t \quad \dots\dots\dots (28)$$

Fig.8は付加ばねの非線形性 K_2/k をパラメータにとった場合の共振曲線を示す。図中の記号●ははり中央位置の振幅がばね定数 K_2 である付加ばね(非線形域)に突入した場合とそうでない場合との境界点である。共振曲線は非線形域へ突入すると折れ曲り、非線形性 K_2/k が大きくなるほど、共振曲線が大きく右傾化する。

Fig.9は励振振幅比 f_1/e_0 をパラメータにとった共振曲線を示す。共振曲線は励振振幅比 f_1/e_0 が大きくなるほど、共振域は拡大することが示され、間隙 e_0 が相対的に小さくなるほど共振域の幅が拡大する。

5. 結言

本研究は非線形ばねで拘束されたはりモデルを設定し、連続体の応答振動について解析した。これを要約すると次のとおりである。

(1) はりスパン中央において非線形ばねで拘束された両端単純支持はりの応答振動の解析モデルを設定した。ついでこの系に変位による任意周期関数励振が作用する場合の定常強制振動についてフーリエ級数解法の適用を試み、応答振動の厳密解を提案した。

(2) (1)の解析結果に基づいて数値計算を行い、応答振動の非線形性 K_2/k 、励振振幅比 f_1/e_0 をパラメータにとった共振曲線および位相遅れ角曲線を作成し、これらに及ぼす諸因子影響を数値的に明らかにした。また周期解の応答振動波形およびばねの復元力の非線形部分を求めた。

(3) (1), (2)から得られた解析結果を確かめるため実験を行い、計算結果は実験結果とかなりよく一致することを示し、本解析法の有効性を検証した。

(4) 本解析法は任意周期関数励振が作用した場合を一般的に取扱うことが可能である。本解析法を確立しておけば、(2)で与えられたパラメータの大小に拘わらず、同一の計算式を用いて生起する応答振動の解を求めることが可能であることを示した。

文献

- (1) Park, W. H. , Mass-Spring-Damper Response to Repetitive Impact, Trans. ASME, J. Eng. Ind. , 89-4 (1967), 587-596.
- (2) Watanabe, T. , Forced Vibration of Continuous System with Nonlinear Boundary Conditions, Trans. ASME, J. Mech. Des. , Vol.100 (1978), 487-491.
- (3) Kumano, H. and Maezawa, S., Forced Vibration in an Unsymmetric Piecewise-Linear System Excited by General Periodic Force Functions, Bull. JSME , 25-206(1982), 1289-1298.
- (4) 田村英之・ほか3名, 任意の三次曲線ばねをもつ自由系の自由振動の厳密解非対称ハードスプリング, 機論, 62-596, C (1996-4), 1247-1255.
- (5) 熊野博之・長尾信幸, 任意周期関数励振を受ける連続体の定常衝突振動解析, 機論, 71-712, C(2005), 3367-3374.
- (6) 小林幸徳・中林恵市・原田晃, ばね支持されたはりの非線形振動解析, 機論, 73-728, C(2007-4), 982-988
- (7) 小林幸徳・山田元・原田晃, 有限要素法を用いた非線形振動解析の低次元化モデル, 機論, 67-657, C (2001-5), 1330-1337.
- (8) Inman, D.J., Engineering Vibration, (1996), P.400, Prentice Hall.