541 静的解析による変位分布を用いた動的非線形方程式の低次元化

Deriving of Reduced-Order Nonlinear Equations by using a Distribution of Displacements by Static Equation

○正 原田 晃 (長崎大)

Akira HARADA, Nagasaki University, 1-14, Bunkyo-machi, Nagasaki

This paper presents a procedure to derive reduced-order nonlinear equations using a projection onto a sub-space which includes solutions of whole-space equations in approximation. The sub-space is defined by vectors that are obtained by decomposing solution vectors of static nonlinear finite element (FE) equations on which equivalent inertia force is acting. Even though we consider a nonlinear vibration, it has verified that there are moments that assuming accelerations are almost proportional to displacements is not so reckless. Thus, solution vectors of static FE equations are able to regard as approximate solutions of dynamic FE equations at that particular moments.

Key Words : Reduced-Order Model, Nonlinear Vibration, Finite-Element Method

A1. はじめに

本研究では解析対象に制限無く超低自由度モデルを得られる手法の確立を目指す。既報において、慣性力に相当する外力が作用する静的有限要素法方程式の解を分解することにより得られるベクトルで定義される部分空間へ写像することにより、系の特徴をほとんど損なうことなく超低自由度モデルを得ることが可能であることが示された。本報では、既報で明らかにされていなかった、静的方程式で用いる等価慣性力のパラメータとしての振動数と動的方程式を解くことにより得られる周期運動の振動数との関係について、一定曲率を有する両端固定はりを対象として検証する。

A2. 静的等価慣性力モデルと動的モデル

本報で解析の基準となる動的有限要素法方程式および部分空間を求めるための静的有限要素法方程式は

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{V}))\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (\text{A1})$$

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{V}^*))\mathbf{V}^* = \omega^{*2}\mathbf{M}\mathbf{V}^* \quad (\text{A2})$$

であり、上付きの*は動的方程式に依存しない静的方程式独自の変数であることを示す。式(A1)を用いて変位と加速度の比 $\ddot{V}_i / -V_i$ を計算したところ、図A1のようにその標準偏差は明確な極小値を示すことが判明した。その時刻における $\ddot{V}_i / -V_i$ の平方根を $\omega_{L1} + \omega^s$ 、変位を $\mathbf{V}^s(\Delta\omega^s)$ とすると、式(A2)において $\omega^* = \omega_{L1} + \Delta\omega^s$ として得られた $\mathbf{V}^*(\Delta\omega^s)$ は、図A2のように $\mathbf{V}^s(\Delta\omega^s)$ とよく一致している。このことから、静的方程式中の振動数は、非線形振動ではあるが、変位と加速度の比がほぼ一定となる時刻の瞬間的な振動数に対応しているといえる。

Fig. A1 Standard deviation of $\ddot{V}_i / -V_i$.

Fig. A2 Relation between $\mathbf{V}^s(\Delta\omega^s)$ and $\mathbf{V}^*(\Delta\omega^s)$.

A3. まとめ

本研究において、静的方程式で用いる等価慣性力のパラメータとしての振動数と動的方程式を解くことにより得られる周期運動の振動数との関係は、少なくとも本報で扱った対象に対しては、明らかになったといえる。

Table 1 Specification of the beams.

Length	$L = 0.313$ [m]
Radius	$R = 10$ [m]
Width	$b = 30.5 \times 10^{-3}$ [m]
Height	$h = 0.6 \times 10^{-3}$ [m]
Boundary Condition	Clamped-Clamped
Number of Element	16
Young's Modulus	$E = 210$ [GPa]
Density	$\rho = 7870$ [kg/m ³]

1. はじめに

従来、幾何学的非線形性を考慮した連続体の非線形振動に関する研究は数多くなされており⁽¹⁾、解析的手法と FEM に代表される数値的手法を組み合わせた手法も幾つか提案されている⁽²⁾⁽³⁾。しかし、それらの手法では、超低自由度モデルが得られる対象は限定される。そこで、本研究では解析対象に制限無く超低自由度モデルを得られる手法の確立を目指す。既報⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾において、慣性力に相当する外力が作用する静的有限要素法方程式の解を分解することにより得られるベクトルで定義される部分空間へ写像することにより、系の特徴をほとんど損なうことなく超低自由度モデルを得ることが可能であることが示された。しかし、静的方程式で用いる等価慣性力のパラメータとしての振動数と動的方程式を解くことにより得られる周期運動の振動数との関係は明らかではなかった。そこで本報においては、一定曲率を有する両端固定はりを対象とし、両者の関係について検証する。

2. 静的等価慣性力モデルと動的モデル

本報で用いる解析モデルの諸元、解析の基準となる動的有限要素法方程式および部分空間を求めるための静的有限要素法方程式を、それぞれ、表1, 式(1),(2)に示す。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{V}))\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{V}^*))\mathbf{V}^* = \omega^{*2}\mathbf{M}\mathbf{V}^* \quad (2)$$

$\mathbf{M}, \mathbf{K}_L, \mathbf{K}_{NL}$ は、それぞれ、質量マトリクス、線形剛性マトリクス、非線形剛性マトリクスであり、 $\mathbf{V}$ は節点量ベクトルであり、各節点 i の接線方向変位（面内変位） U_i 、曲率半径方向変位（面外変位） W_i 、たわみ角 θ_i から構成されている。また、上付きの * は動的方程式に依存しない静的方程式独自の変数であることを示す。

既報において、式(1)によって得られた変位分布と式(2)によって得られた変位分布は、応答レベルが同程度であれば、定性的にはよく一致していることが確認されている。そのことから、非線形振動においても変位と加速度の比の空間分布が一定に近い瞬間があるので

Fig. 1 Standard deviation of $\dot{V}_i / -V_i$. Fig. 2 Distribution of $\dot{U}_i / -U_i$ (triangle), $\dot{W}_i / -W_i$ (square) and $\dot{\theta}_i / -\theta_i$ (rhombus), at $\omega_{NL}/\omega_{L1} = 0.872$, (a):hollow: $\tau = \tau_{max}$, solid: $\tau = \tau_{min}$, (b):hollow: $\tau = \tau_p^s$, solid: $\tau = \tau_n^s$.

はないかと推測される。そこで、式(1)を用いて、周期運動中の各節点における変位と加速度の比、 $\dot{V}_i / -V_i$ を計算した。線形振動状態であれば $\dot{V}_i / -V_i$ は正の定数となり、運動の周期から求まる角振動数の二乗と一致する。図1に $\dot{V}_i / -V_i$ の標準偏差を示す。図1-(a)は全体図であり、図1-(b)は $\omega_{NL}/\omega_{L1} = 0.953$ における断面図である。はり中央の面外変位 W_8 は $\tau = 0$ において最大値を示し、 $\tau = \pi$ において最小値を示している。図から、 $\tau = 0 \pm \Delta\tau_p$ および $\tau = \pi \pm \Delta\tau_n$ において極小値を示していることがわかる。また、どの非線形固有角振動数においても $(\pi + \Delta\tau_n) - (0 + \Delta\tau_p)$ と $(\pi - \Delta\tau_n) - (0 - \Delta\tau_p)$ の値はほぼ π を示している。そこで、 W_8 が最大、最小となる $\tau_{max} = 0, \tau_{min} = \pi$ および $\dot{V}_i / -V_i$ の標準偏差が極小値をとる $\tau_p^s = 0 + \Delta\tau_p, \tau_n^s = \pi + \Delta\tau_n$ における $\dot{V}_i / -V_i$ の分布について詳しく調べてみる。

Fig. 3 Relation between $\Delta\omega^s$ and W_g^s , and between $\Delta\omega^*$ and W_g^* .

図2に、 τ_{max}, τ_{min} および τ_p, τ_n における変位と加速度の比を示す。図から、 τ_p, τ_n においては変位と加速度の比はほぼ一定値であることがわかる。また、その比率は τ_p においては線形固有角振動数の二乗よりも大きく、 τ_n においては小さいことがわかる。これは、 τ_p つまり面外変位が全体的に正の領域にあるときには漸硬ばね特性を示し、 τ_n つまり面外変位が全体的に負の領域にあるときには漸軟ばね特性を示す、振動の非対称性に対応しているといえる。この τ_p, τ_n の瞬間の変位と加速度の比の平均値から、その瞬間における角振動数を

$$\begin{aligned}\omega_{(p,n)}^s &= \omega_{L1} + \Delta\omega_{(p,n)}^s \\ &= \sqrt{\text{mean}(\ddot{V}_i(\tau_{(p,n)}) / -V_i(\tau_{(p,n)}))} \quad (3)\end{aligned}$$

と定義する。

この τ_p, τ_n における瞬間的な角振動数の線形固有角振動数からのずれ $\Delta\omega_p^s, \Delta\omega_n^s$ とそのときのやはり中央の面外変位 W_{gp}^s, W_{gn}^s の関係を図3に示す。図3には、式(2)において $\omega^* = \omega_{L1} + \Delta\omega^*$ として計算した場合の $\Delta\omega^*$ と W_g^* の関係も同時に示している。また、 $\omega_{NL}/\omega_{L1} = 0.871$ ($\Delta\omega_p^s/\omega_{L1} = 0.188, \Delta\omega_n^s/\omega_{L1} = -0.307$) のときの $V_{(p,n)}^s$ と、 $\Delta\omega_{(p,n)}^s$ それぞれと同じ値の $\Delta\omega^*$ を用いて式(2)を計算した場合の $V_{(p,n)}^*$ を図4に示す。これらの図から、式(1)と式(2)の結果は定性的にも定量的にも一致しているといえる。このことから、式(2)中の外力パラメータとしての角振動数 ω^* は非線形振動中に変位と加速度の比がほぼ一定となる時刻における瞬間的な角振動数に対応しているといえる。また、図5に示すように、各非線形固有角振動数における τ_p と τ_n における瞬間的角振動数の線形固有角振動数からのずれの比 $|\Delta\omega_n^s/\Delta\omega_p^s|$ は、非線形固有角振動数が小さくなると $|\Delta\omega_n^s/\Delta\omega_p^s|$ は1.5付近に分布していることがわかる。

Fig. 4 Distribution of V^s at $\omega_{NL}/\omega_{L1} = 0.871$, and of V^* obtained by $\Delta\omega^* = \Delta\omega^s$.

3. 低次元化モデルの導出

以上のことから、本報においては、式(2)において $\omega^* = \omega_{L1} + \Delta\omega^*$ を用いて計算した解 V_p^* と $\omega^* = \omega_{L1} - 1.5\Delta\omega^*$ を用いて計算した解 V_n^* の奇関数的成分と偶関数的成分

$$\begin{aligned}V_e^* &= (V_p^* - V_n^*)/2 \\ V_o^* &= (V_p^* + V_n^*)/2 \quad (4)\end{aligned}$$

を用いて

$$V = V_o^{*s}\xi_o + V_e^{*s}\xi_e + V_o^{*t}\eta_o + V_e^{*t}\eta_e \quad (5)$$

と全変数空間から部分空間へ写像することにより低次元化モデルを得ることとする。ここで、上付き添え字 s および t は s 方向成分以外および t 方向成分以外を0としたベクトルであることを示し、 $\Delta\omega^*$ は $\max(|W_{gp}^*|, |W_{gn}^*|) \simeq 0.5h$ となる値とした。また、 τ_p と τ_n はおよそ π はなれていることから、 $\bar{\tau} = \tau - (\tau_p^s + \tau_n^s)/2$ と時間の原点をずらすことにより、 $V_p^s = V^s(\tau = \tau_p^s) = V^s(\bar{\tau} = -\pi/2)$, $V_n^s = V^s(\tau = \tau_n^s) = V^s(\bar{\tau} = \pi/2)$ となる。よって、 V_p^*, V_n^* には奇関数の奇数次成分と偶関数の偶数次成分が強く存在していると考えられ、 V_p^*, V_n^* の差には奇関数の奇数次成分が、和には偶関数の偶数次成分が強く存在していると考えられる。

4. 計算結果

式(1)と写像式(5)によって得られた低次元化モデルに数値積分を適用することによって得られた背骨曲線を図6に、 $\omega_{NL}/\omega_{L1} = 0.871$ における変位空間トラジェクトリの $U_1-U_2-U_4$ 空間、 $U_5-U_6-U_7$ 空間、 $W_1-W_2-W_4$ 空間、 $W_5-W_6-W_7$ 空間への射影を図7に示す。これらの図より、本報で用いた手法により求められた部分空間は十分に解空間を近似的に内包しているといえ、また、その部分空間への写像によって得られた低次元化モデルは、変位レベルが低い節点においては精度の低下が見られるが、十分な精度を有するといえる。

Fig. 5 Absolute value of a ratio of $\Delta\omega_n^s$ to $\Delta\omega_p^s$.

Fig. 6 Back bone curve obtained by the full model (Eq.(1)) and by the reduced order model.

5. ま と め

以上のことから、静的方程式で用いる等価慣性力のパラメータとしての振動数と動的方程式を解くことにより得られる周期運動の振動数との関係は、少なくとも本報で扱った対象に対しては、明らかになったといえる。しかしながら、解析の一般化を図る上では、どのような対象に対してでも半周期離れた時間において変位と加速度の比がほぼ一定となるような瞬間が生じるのかを、理論的に検証する必要があるといえる。

文 献

- (1) Yasuda, K., Review of Research in Japan on Nonlinear Oscillation of Elastic Structures, *JSME Int. J.*, **39**-3, C (1996), pp.439 - 449.
- (2) Ribeiro, P. and Petyt, M., Nonlinear Vibration of Beams with Internal Resonance by Hierarchical Finite-Element Methods, *J. Sound Vib.*, **224**-4 (1999), pp.591 - 624.
- (3) Shi, Y. and Mei, C., A Finite Element Time Domain Modal Formulation for Large Amplitude Free Vibrations of Beams and Plates, *J. Sound Vib.*, **193**-2 (1996), pp.453 - 464.
- (4) 小林幸徳・山田元・原田晃, 有限要素法を用いた非線形振動解析の低次元化モデル, *機論*, **67**-657, C (2001), pp.1330 - 1337.
- (5) Harada, A., Kobayashi, Y. and Yamada, G., Reduced-Order Nonlinear Modal Equations of Plates Based on the Finite Element Method, *JSME Int. J.*, **45**-1, C (2002), pp.79 - 86.
- (6) 原田晃, 真直はりおよび曲がりはりに対する低次元非線形方程式の導出, D&D'06 講演論文集, (2006), 講演番号 142.

Fig. 7 Trajectory of V obtained by the full model (Eq.(1)) and by the reduced order model at $\omega_{NL}/\omega_{L1} = 0.871$.

- (7) 小林幸徳, 中林恵市, 原田 晃, ばね支持されたはりの非線形振動解析, *機論*, **73**-728, C (2007), pp.982 - 988.
- (8) 原田 晃, 小林幸徳, 擬似モードを用いた曲がりはりの低次元非線形モード方程式, *機論*, **73**-728, C (2007), pp.989 - 996.