613 高次スペクトルを用いた非線形振動解析

(磁気を利用したモデルについて)

Nonlinear Analysis by Higher Order Spectra (Magnetic Model)

○正 松本 宏行(ものづくり大学) 非 小野寺 祐人(マキタ)

正 大石 久己(工学院大学) 名 山川 新二(工学院大学)

Hiroyuki MATSUMOTO, Inst. of Technologists, 333, Maeya, Gyoda, SAITAMA

Yuuto ONODERA, Makita Corporation.

Hisami OHISHI, Kogakuin Univ.

Shinji YAMAKAWA, Kogakuin Univ.

The purpose of this work is to identify the characteristics of a nonlinear vibration system subjected to a random input. In a general, a statistical technique of a higher order spectra(HOS) could be used for non-gaussian data analysis. Here, experimental model (Magnetic model) analysis was executed for an asymmetrical nonlinear vibration system, and showed nonlinear mapping.

Keywords: nonlinear, vibration, spectral analysis, dumping, system control

A1.はじめに

本報告では、筆者たちが不規則入力を受ける非線形振動系における新しい同定手法として提案してきた高次スペクトルを用いて非線形振動系の実験解析を行った。今回は、磁石の反発特性を考慮して非対称特性を有するモデルを製作し、その特性について解析を行い検討を行った。

A2.高次スペクトル

高次スペクトルの一つであるバイスペクトルについて取り上げる。バイスペクトルとは、「二つの周波数のスペクトル」という意味である⁽¹⁾。パワースペクトルが相関関数のフーリエ変換で表されるのに比べて、バイスペクトルは、三次の相関関数の二重フーリエ変換で定義される。

$$B(f_1, f_2) = \frac{1}{T} E[X(f_1)X(f_2)X^*(f_1 + f_2)]$$

・・・(A1)

ここで * は複素共役数をあらわす。

A3.実験モデルについて

今回の報告において製作した実験モデルは磁石をモデル内に配置して磁気的反発を利用した非線形モデルである。可動側については、リニアベアリングを利用して垂直方向に運動するように支持している。(図A1)

A4.考察まとめ

図A2において、加速度応答時刻歴データであるところどころにスパイク状の特徴のある時間データである見受けられる。経過時間に応じた高次統計量の考察においてもひずみ度、とがり度などに特徴のある結果が得られている。

図A3によれば、パワースペクトルで顕著である4Hzに関連する(4Hz, 4Hz)においてバイスペクトルがピークが存在する。非対称特性を有する実験モデルにおいて本手法の有効性を提示することができた。

Fig.A1 Experimental Apparatus

Fig.A2 Time history of data

Fig.A3 Spectrum
(Left: Powerspectrum, Right: Bispectrum)

1.はじめに

機械構造物に存在する現象はガタ、摩擦などの非線形特性を有するものが多く、不規則入力を受ける振動系の応答特性は「くせ」のあるいわゆる非ガウス性(non-gaussian)の不規則過程となる。これらのデータの取り扱いには統計的手法の適用、さらには非ガウス性を考慮した高次統計量(higher order statistics)を用いた解析が必要不可欠である。

本報告では、筆者たちが不規則入力を受ける非線形振動系における新しい同定手法として提案してきた高次スペクトル(Higher Order Spectra;HOS)を用いて非線形振動系の解析を行った。今回は、実験モデルとして、磁石の反発特性を考慮して非対称特性を有するモデルを製作し、その特性について解析を行い検討を行った。これらが今回の報告の骨子である。

2. 高次スペクトル

高次スペクトルは、元々は高次のキュムラントの多重フーリエ変換で定義されるが、実際の計算では、データの対称性や計算時間などを考慮して、フーリエスペクトルの高次積で算出することが多い。また、これらのデータ処理については、前処理やウィンドウを掛けたりなどの統計的なデータを精度良くかつ統計的な誤差を考慮して算出することが重要である。

また、高次元のデータ処理となるので、実際の結果を図示する場合については、必要とする周波数間の関係を定め、その周波数成分間の断面図などを選び、適宜データの低次元化を図ることも必要である。今回の報告では、高次スペクトルの一つであるバイスペクトルについて取り上げる。

バイスペクトルとは、「二つの周波数のスペクトル」という意味である⁽¹⁾。パワースペクトルが相関関数のフーリエ変換で表されるのに比べて、バイスペクトルは、三次の相関関数の二重フーリエ変換として定義される。

$$B(f_1, f_2) = \frac{1}{T} E[X(f_1)X(f_2)X^*(f_1 + f_2)] \quad \dots (1)$$

ここで * は複素共役数をあらわす。

このバイスペクトルは2次の周波数スペクトルを有し、かつそれぞれの従属関係が存在するときに値に意味をもつ。上記は一つの変量を取り扱ったもので、オートバイスペクトル(auto bispectrum)という。また入出力相互の非線形伝達特性をあらわしたものをクロスバイスペクトル(cross bispectrum)という。

その特徴の一つは、着目している周波数成分間の従属関係を示していることにある。

これは非線形振動系における高調波、分数調波振動などの主共振の周波数を中心として、他の周波数成分を含む場合に有効な手法となる。

これらの周波数成分間の特性を示すために、より厳密な形式でスペクトルを論じることが必要である。

時間データ $x(t)$ を Foulrier-Stieltjes (フーリエ・スチエルチェス) 変換を用いて次式のように表示する⁽²⁾。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dX(\omega) e^{j\omega t} \quad \dots (2)$$

パワースペクトル $P(\omega)$ は、成分 $dX(\omega)$ を用いることにより、

$$\langle dX(\omega_1)dX(\omega_2) \rangle = \begin{cases} P(\omega) & (\omega_1 + \omega_2 = 0) \\ 0 & (\omega_1 + \omega_2 \neq 0) \end{cases} \quad \dots (3)$$

となる。つまり、パワースペクトルは、2つの周波数成分の依存性を保持しているが、物理的に等価な正、負それぞれの周波数成分同士についての関係を議論していることになる。よって、単一の周波数成分のみの特性に限定されるのである。

次に、バイスペクトルについても同様の形式で表現すると次式になる。

$$\begin{aligned} \langle dX(\omega_1)dX(\omega_2)dX(\omega_3) \rangle \\ = \begin{cases} B(\omega) & (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0) \\ 0 & (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \neq 0) \end{cases} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

となる。

ここでは、文献(2)に従って、円振動数 ω の表現で示している。周波数 f でも同様に定式化が可能である。周波数 f について引き続き解説すると、バイスペクトルが値を持つ場合は

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad \dots (5)$$

のとときであり、3つめの周波数 f_3 について注目をして、残り2つの周波数の組みあわせ $(f_1 + f_2)$ と従属していると思わせる場合には、次のように式変形できる。

$$f_1 + f_2 + (-f_1 - f_2) = 0$$

すなわち、3つの周波数の組において、2つの周波数成分間の従属性を明確にすることが可能である。

さらに、 $f_2 = 2f_1$ と置き換えることで2倍の高調波成分の従属性を具体的に値を有することになる。

また、位相がランダムな場合については、バイスペクトルの値は平均化の過程で値を持たないが、各周波数成分間に従属性を持ち、なおかつ位相関係が結合している場合にはバイスペクトルは値を有する。パワースペクトルなどにはないバイスペクトルの特徴の一つである。

また、バイスペクトル自身が値の大きさ(パワー)に依存しないようにバイスペクトルをパワースペクトルで除して基準化(正規化)したものを著者らは、「ひずみ度関数」と名づけてデータの有意性に役立てている。次式がその定義式である。

$$S(f_1, f_2) = k \frac{B(f_1, f_2)}{\sqrt{P(f_1)P(f_2)P(f_1 + f_2)}} \quad \dots (6)$$

ここでは、係数 k を1として解析に利用している。

著者らは、非線形振動系においてガタを持つ非線形、片側飽和特性など復元力において非線形特性を有する代表的なモデルについて考察を行ってきた。^{(3),(4)} 高次スペクトルは、元々は高次のキュムラントの多重フーリエ変換で定義されるが、実際の計算では、データの対称性や計算時間などを考慮して、フーリエスペクトルの高次積で算出することが多い。

全体の傾向を3次元データから眺め、特徴のある周波数成分同士に着目をして、断面をとったり、低次元化（二次元データ）して、周波数成分間の従属関係をさらに詳細に調査を行うことがバイスペクトルなど次元の高いスペクトル解析には特に必要である。

3. 実験モデルについて

今回の報告において製作した実験モデルは磁石をモデル内に配置して磁気的反発を利用した非線形モデルである。可動側については、リニアベアリングを利用して垂直方向に運動するように支持している。

そのため、従来著者らがコイルスプリングなどでばね特性を実現したモデルとは異なり、跳躍するタイプのモデルとして製作している。

Fig.1 Experimental Apparatus

今回の実験モデルは、ネオジウム磁石を土台側、可動側にそれぞれ配置している。磁化方向は厚み（垂直）方向、表面磁束密度 430mT、480mT のものをそれぞれ利用している。

まず、磁石間距離を 21mm に固定支持し、加振実験により加振方法（サインスイープ、ランダム）を変えながら、加振信号における出力電圧など複数のパターンを変化させ実験データを取得した。

4. 実験方法について

実験方法については

- ・ランダム加振
- ・サイン波加振
- ・サインスイープ加振（上昇・下降）

の3種類の加振方法を用いて実験を行った。（図2）

通常、非線形特性を詳細に調査する場合には、サイン波を利用したスイープ加振実験が広く利用されているが測定時間が長くなるのが難点である。その反面、線形振動系などの実験（実験モデル解析などを例として）においては、ランダム加振、インパルス入力なども広く利用されている。サインスイープ加振と比べれば、測定

時間などは短くて済み簡便な方法でもある。

対象とするモデルにおける実稼動時などの挙動から非線形特性を把握推定するには、ランダム入力などのデータから推察できるとより便利である。

しかし、従来のスペクトル解析では非線形特性を線形化してしまったり、必要とする特性をうまく抽出することができない。高次の統計量を考慮した解析が重要であることの理由の一つがここにある。

今回は、高次スペクトルの一つであるバイスペクトルを用いた解析手法を実験モデルにおいても利用するために、これらの実験手法を含めて議論を行っている。

高次スペクトルについては、実稼動時の測定を想定して、ランダム加振のデータから考察を行う。

サイン波およびサインスイープ加振についてもジャンプ現象などを確認できているがここでは説明を省略をする。

Fig2. Experimental Apparatus

F F Tアナライザから試験信号（サイン波、ランダム波）を出力し、パワーアンプ（EMIC371-A）で増幅した信号を利用して加振器（EMIC513-B）に印加させる。その加振器の土台に、今回の実験モデルを取り付けた。さらに、加振器取り付け台側（基礎側）と可動部質量側それぞれに加速度ピックアップ（B&K4393）を取り付けて、それぞれの加速度データをF F Tアナライザにてデータ取得を行った。その2chのデータの計算処理においては、プログラムを用いて、データのグラフ化、バイスペクトルの解析に役立てている。

その他、非線形系の特性を把握するために、入力レベルをおおよそ3段階に分けて振幅依存性などの検討を行った。

5. 実験解析結果

ランダム波形を作成し、実験モデルを加振したときの時刻歴応答データ例を図3に示す。データ数Nは2048pointsである。

Fig.3 Time of history data

さらに、時間領域における高次統計量を含めたデータを解析した。応答加速度時刻歴について、平均値、分散に加えて、ひずみ度、とがり度などの高次統計量を算出する。

なお、ひずみ度およびとがり度については、次の定義式に基づいて簡単に説明する。

まず、 i 番目のデータ x を x_i とおき、平均（Average） μ_1 、

$$\mu_1 = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

とおき, k 次のモーメントは

$$\mu_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^k$$

と定義される. つぎに, ひずみ度 α (Skewness) はこれらのモーメントを用いると

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

と定義される. これは, 分布の非対称性を示すパラメータである. さらに, とがり度 β (Kurtosis) も同様に定義すると

$$\beta = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

となる. これは, 分布の集中度 (とがり) を示すパラメータである.

ここで, 経過時間に応じて各統計量がどのように変化するのかを考察する.

データずらし数を 1 点として, 切り出す部分区間のデータ N_{sub} を 1024 points とする. データを 1 点ずつずらしながら, 高次統計量を含めた統計量を算出し, 図示した. 上段より上から順番に平均, 分散, ひずみ度, およびとがり度である. (図 4)

なお, 横軸はずらした時間に対応した時間, 縦軸は各統計量に対応している.

Fig.4 Higer order statistics(Time-varying)

図 4 によると, 分散についてはほぼ変化はないものと観察されるが, 平均値はもとより, ひずみ度, とがり度は経過時間において変動が大きく特徴ある応答時系列データであることが推察される.

後述するが, 今回実験に用いたモデルのばね特性を同定したところ変位の 4 次のべき乗を含む非線形特性であることが把握できている. 高次統計量の時間変化から 4 次特性特にとがり度に関連する特徴は大きいことがこれらにより裏づけられる.

さらに, これらの時刻歴データを取り出して, データ処理してパワースペクトルを求めた. (図 5)

Fig5. Power Spectrum (Random)

4 Hz 付近および 8 Hz 付近にもピークが存在していることが観察される. パワースペクトル解析ではこれらの周波数成分間の従属性は明らかにできない. つぎに, バイスペクトル解析を行った.

Fig.6 Bispectrum (3D)

図 6 は, 二つの周波数成分 f_1, f_2 そしてバイスペクトルの大きさ (絶対値) を高さ方向として 3 次元表示したものである. $(f_1, f_2) = (4\text{Hz}, 4\text{Hz})$ のところで大きなピークが存在している. さらに等高線図 (コンタマップ) を用いて観察する. (図 7)

Fig.7 Bispectrum (Contour Map)

等高線図 (コンタマップ) からさらに, $(f_1, f_2) = (8\text{Hz}, 4\text{Hz})$ の成分にもピークが観察されている.

さらに、 $f_1 = f_2$ をつなぐ対角線方向に断面をとり、ひずみ度関数の表示を図8に示す。

Fig8. Skewness Function($f_1=f_2$)

ひずみ度関数によれば、4 Hz について最大値1に近い値をとっている。このことから基本周波数4 Hzにおいて2倍の周波数成分(8 Hz 付近)との周波数成分間の依存性が統計的にも裏付けられたことになる。

これらにより、4 Hz を基本周波数成分としてみたときに、2倍および3倍の周波数成分間の従属性があることが推定される。

6. ばね定数特性について

次に、この実験モデルにおける変位と力特性について注目し、ばね特性の同定実験を行った。

Fig9. Laser Displacement Meter(Unit)

実験モデルに一定の荷重を徐々に加えながら、そのときに対応する変位特性についてレーザ変位計を用いて測定した。測定装置としては、キーエンス社の LC2400 (メーター) と変位計 (ヘッド) LC2450 を利用した。(図9)

Fig.10 Curve Fiting (Magnetic Model)

磁石間距離を横軸、そして関連づけられる力(反発力など)による関係特性を図10に示した。

この曲線の当てはめ処理(カーブフィット)をしたところ、磁石間距離 x における x の4次式による当てはまりが良い傾向を示した。つまり、磁石による反発特性を用いた

ばね特性はなめらかな非線形特性を有し、二次項、四次項を含んだ非対称特性になることが観察されている。磁石間距離(静止時)5 mm から順番に変化させて、その都度、曲線の当てはめ処理をしてみたところ、5 mm ではほぼ線形特性に近い傾向を示しているが、7 mm, 15 mm など磁石間距離を大きくしていくことにより、非線形特性の傾向が大きくなることがわかった。

今回の高次スペクトルのひとつであるパイスペクトルによる実験解析結果においても偶数次成分が含まれる非対称特性から結論される結果であることがばね特性からも明らかになっていることがわかる。

なお、今回の実験モデルに加えて、可動質量について両側から磁石を挟みこむ形式の実験モデルもあわせて製作を実施した⁽⁸⁾。対称特性を有する非線形モデルもあわせて製作を行い、実験解析を行い、当てはめ処理をしたところ、偶数次を含まない奇数次のみの特性であることがわかった。

これらにより、対称特性には基本波と3次波、5次波などの奇数次成分のみになるのでパイスペクトルでは、これらの特性を把握するのは原理上難しい。

この場合には、高次スペクトルとしてさらに一つ次数の高いトライスペクトルの適用が効果的であると考ええる。非線形特性のうち、この対称特性を考慮した実験モデルにおける解析については稿を改めて詳細に報告を行いたい。

7. まとめ

今回の報告では、実験モデルとして磁石の反発による力を利用した非対称特性を有する特性について実験解析を行った。高次統計量を考察すると経過時間に応じての変化が顕著であることが判明した。非定常データにおける時系列モデルの解析、近似的な部分定常データとしてデータ区間の分割なども検討も興味深い。

片効き特性のため非対称特性を有することから、高次スペクトルのひとつであるパイスペクトルによって特徴を明らかにすることができた。さらに、パワー成分に依存しないようにパイスペクトルを基準化したひずみ度関数についてもあわせて解析を行い、その周波数成分間の依存性を明確に示すことができた。対称および非対称を含む広範囲の非線形特性について考察をしていくことで、高次スペクトルを利用した本手法を有効性についても引き続き取り組んでいきたい。

参考文献

- (1)松本, 山川, 大石: 機論C編, 62巻604号
- (2)日野 幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店, p 246- p 254.
- (3)小山 智良: 2004年度工学院大学卒業論文(2005)
- (4)牧内 一浩: 2003年度工学院大学卒業論文(2004)
- (5)青木, 浅香: 2002年度工学院大学卒業論文(2003)
- (6)松本, 山川, 大石: 日本 IFToMM 会議シンポジウム (2004)
- (7)松本, 小室, 山川: 日本機械学会関東支部講演会(2004)
- (8)小野寺 祐人, 2006年度工学院大学卒業論文(2007)