623 ファジィ数の導入によるモデルパラメータの不確定性を考慮した固有振動数解析

Natural Frequency Analysis for Models with Uncertain Parameters using Fuzzy Numbers

○ 正 鞍谷 文保 (和歌山大教) 正 石塚 真一 (サイバネットシステム)
 鷲尾 幸司 (サイバネットシステム)

Fumiyasu KURATANI, Wakayama University, 930 Sakaedani, Wakayama 640-8510
 Shinichi ISHIZUKA and Saiji WASHIO, Cybernet Systems Co., Ltd.

This paper proposes an efficient procedure for finding the possible ranges of uncertain natural frequencies of a finite element model with uncertain parameters. Uncertain model parameters are described by input fuzzy numbers and then output fuzzy numbers are calculated by fuzzy arithmetic. The fuzzy arithmetic used is based on the α -cut concept and interval analysis. To reduce computation time in the interval analysis, the global optimization technique using response surface models is introduced. Furthermore, we propose an approach for finding the feasible ranges of uncertain model parameters when the ranges of natural frequencies are specified. The examples through a simple frame model show that the membership functions of uncertain natural frequencies are efficiently and accurately estimated by the proposed procedure. In addition, the ranges of uncertain model parameters are properly evaluated by the proposed approach.

Key Words: Finite Element Model, Natural frequency, Uncertainty, Fuzzy Number, Response Surface Method

A1. 緒 言

有限要素法は、構造設計の最適化や妥当性検討のツールとして広く用いられている。そのモデリングにおいては、寸法や材料特性などの不確定性が検討されるが、解析時にはモデルは確定系と見なされる。そこで、不確定性を考慮するために、モデルパラメータをファジィ数でモデル化し、ファジィ演算により構造挙動の不確定性を解析するファジィ有限要素法 (ファジィ FEM) について検討する。本報では、固有振動数解析におけるファジィ FEM の計算負荷を低減するために応答曲面を利用する。また、固有振動数の変動範囲に対するモデルパラメータの実現可能範囲を推定するための方法についても検討する。

A2. ファジィ有限要素法

モデルパラメータの不確定性をファジィ数で表現できれば、応答挙動の不確定性はファジィ演算で計算できる。本報では、 α -カット法と区間解析法を用いて解析を行う。Fig.A1 のようにモデルパラメータのメンバーシップ関数をいくつかのレベルに分け、レベルごとに応答挙動の区間を求める。それを積み重ねることで応答挙動のメンバーシップ関数を得る。区間解析の計算負荷を低減するために応答曲面を利用する。実験計画法で評価点を割り付け、その各点で通常の FEM 解析を行う。その後、FEM 解析結果から作成された応答曲面モデルを用いて区間解析を行う。また、逆問題としてモデルパラメータの実現可能範囲を得る場合にも応答曲面を利用する。

A3. 解 析 例

例として、簡単な門型構造フレームモデルを取り上げた。不確定モデルパラメータとして 2 つのはりの高さを設定した。モデルパラメータは左右対称な三角型ファジィ数でモデル化した。応答曲面モデルを利用して得られた 4 次モードの固有振動数のメンバーシップ関数を Fig.A2 に示す。応答曲面を用いた結果は、FEM 解析から得られた結果とよい一致を示している。また Fig.A3 に、4 次モードの固有振動数の変動を与えたときのモデルパラメータのメンバーシップ関数を示す。図が意味することは、モデルパラメータの

値が"○"の間にあると、固有振動数の値は設定した変動区間に留まることである。また、モデルパラメータがどのように制約されているかも明確になる。このようなモデルパラメータの実現可能範囲を解析することは、ファジィ FEM の新たな適用として有望と考える。

A4. 結 言

本報では、応答曲面を用いることで計算負荷を低減するファジィ有限要素解析法を提案した。また、固有振動数を入力ファジィ数、モデルパラメータを出力ファジィ数とした逆問題として、モデルパラメータの実現可能範囲を推定する方法を提案した。解析例でその有用性を示した。

Fig.A1 α -cut concept

Fig.A2 Membership function of the natural frequency (Mode 4)

Fig.A3 Membership functions of model parameters (Mode 4)

1. 緒 言

有限要素法は、構造設計における最適化や妥当性検討のツールとして広く用いられている。そのモデリングにおいては寸法、材料特性、部品間の結合状態などの不確実性が検討されるが、解析時にはモデルは確定系と見なされる。すなわち、寸法などの設計変数（モデルパラメータ）の代表値を用いて代表値としての構造挙動を求め、その値を基に設計の最適化や妥当性の評価が行われる。しかし、製品の信頼性を確保するためには、構造挙動の代表値を知るだけでは不十分で、モデルパラメータの不確実性が構造挙動の変動に及ぼす影響を定量的に把握しておく必要がある。

構造解析における不確実性の評価法として、モンテカルロ法と確率有限要素法⁽¹⁾がよく知られている。しかし、モンテカルロ法は膨大な計算を要し、確率有限要素法は設計変数の変動幅が小さい場合に適用が限定される。例えば、設計の初期段階では寸法や材料特性がまだ確定しておらず、不確実性すなわちパラメータ値の変動範囲が大きい。また、部品間の結合モデルなどは確率構造としての取り扱いが困難である。しかし、そのような場合でも構造挙動の最大変動範囲すなわち最悪な状況を把握することができれば、設計の有用な情報となる。そこで、モデルパラメータの不確実性を確率論的な方法ではなく、ファジィ数を用いて表す考え方が提案された⁽²⁾。この方法では、不確定なモデルパラメータをファジィ数で表現し、ファジィ演算により構造挙動の不確実性を解析する。この考え方は有限要素法解析にも適用され、ファジィ有限要素法（ファジィ FEM）と呼ばれ⁽³⁾、動解析の分野にも適用されている^{(4)~(6)}。ファジィ FEM で得られる結果は、パラメータ値の変動に対する応答挙動の変動の統計量ではなく、応答挙動の生じる可能性を示すものである。そこで、ファジィ FEM で応答挙動の変動範囲を推定し、それを構造の信頼性解析に利用する研究が行われている⁽⁷⁾。しかし、固有振動数解析のためのファジィ FEM 解析法においては、解決すべき問題が残されている。

本報では、応答曲面を利用することでファジィ固有振動数解析における計算負荷を低減する方法を提案する。また実際の設計では、仮定した固有振動数の変動に対するモデルパラメータの実現可能範囲を知ることにも意義がある。そこで、固有振動数を入力ファジィ数、モデルパラメータを出力ファジィ数とした逆問題を考えることで、モデルパラメータの実現可能範囲を推定する方法を提案する。

2. ファジィ有限要素法

固有振動数の不確実性を解析するためのファジィ有限要素法（ファジィ FEM）について説明する。

2.1 ファジィ数とファジィ演算 ファジィ数は数値上のファジィ集合のことで、帰属度はメンバーシップ関数で定義される。ファジィ FEM の場合、モデルパラメータの不確実性をファジィ数で表現する。具体的な特性はメンバーシップ関数で定義されるが、その形状は解析者の知識、経験あるいは実験データなどから決められる。メンバーシップ関数に求められる条件は、連続的で凸性さらに正規性を持つことである。本報では、メンバーシップ関数が

$$\mu_{p_i} = \begin{cases} 1 - (p_i^c - p_i) / (p_i^c - p_i^l) & \text{for } p_i^l \leq p_i \leq p_i^c \\ 1 - (p_i - p_i^c) / (p_i^u - p_i^c) & \text{for } p_i^c \leq p_i \leq p_i^u \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

で定義される三角型ファジィ数を用いる (Fig.1)。ここで、

p_i^c は代表値、 p_i^l と p_i^u はパラメータの下限值と上限値である。

モデルパラメータの不確実性がファジィ数で表現できれば、ファジィ演算で出力ファジィ数、すなわち応答挙動のメンバーシップ関数を求めることができる。しかし、拡張原理を用いたファジィ演算を FEM 解析に適用することは困難であるので、 α -カット法と区間解析法を組み合わせた方法を用いる。具体的には、Fig.2 のようにモデルパラメータのメンバーシップ関数を α -カットでいくつかのレベルに分け、ファジィ集合をクリスプ集合に還元する。その後、Fig.3 のように各 α -レベルで通常の確定的な FEM 解析を行い各レベルの応答挙動の区間を求める。それをレベルごとに積み重ねることで応答挙動のメンバーシップ関数を得る。モデルパラメータのメンバーシップ関数をモデルパラメータの可能性分布と考えると、応答挙動のメンバーシップ関数は応答挙動の可能性分布になると考えられる。

2.2 応答曲面法を導入したファジィ解析法 α -カット法と区間解析法を組み合わせた方法として、頂点法 (Vertex Method)⁽⁸⁾と最適化手法を用いた方法 (global optimization method)^{(9),(10)}が提案されている。しかし、頂点法では、各 α -レベルにおいてモデルパラメータの下限值と上限値だけを用いて評価点の組を作り、その各組に対して通常の FEM 解析を行い、区間を決める。したがって、モデルパラメータの下限值と上限値の組み合わせだけでは、正確な応答挙動の区間が求まらない可能性がある。最適化手法を用いれば厳密に区間を定めることが可能である。しかし、最適化手法では固有値解析を繰り返し行なう必要があり、その回数をあらかじめ見積ることも困難である。

本報では、応答曲面法⁽¹¹⁾を導入することで、解析負荷を低減したファジィ FEM 解析法を提案する。応答曲面法とは、設計変数と応答挙動との関係を曲面で近似し、その近似関数 (応答曲面モデル) を最適化に利用する手法である。応

Fig.1 Fuzzy number with a triangular membership function

Fig.2 Decomposition of a fuzzy number into intervals

Fig.3 α -cut concept

答曲面モデルを用いることで、計算コストのかかる再解析や感度解析が効率的に行える。本報では、モデルパラメータと固有振動数の関係を応答曲面で表し、そのモデルを用いて各 α -レベルでの固有振動数の区間を求める。応答曲面モデルとして、次式で示す 3 次の多項式を用いる。

$$\hat{f}_r(\{p\}) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i p_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} p_i p_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ijk} p_i p_j p_k \quad (2)$$

ここで、 $\hat{f}_r$ は r 次の固有振動数の推定値で、 a_0 , b_i , c_{ij} , d_{ijk} は多項式の係数を表す。 n はモデルパラメータの数である。係数は最小二乗法により次式で求める。

$$\{x_r\} = ([P]^T [P])^{-1} [P]^T \{f_r^A\} \quad (3)$$

ここで、 $\{x_r\}$ は式(2)の係数を要素とするベクトル、 $[P]$ はモデルパラメータ値から決まる定数行列、 $\{f_r^A\}$ は評価点における FEM 解析で得られた r 次の固有振動数である。

近似精度の高い応答曲面を得るためには、評価点（モデルパラメータ値の組合せ）の適切な割付けを行う必要があり、そのために実験計画法を用いる。本報では 3 水準要因計画を適用し、水準としてモデルパラメータの下限値、代表値、上限値を用いる。実験計画法で割付けられた評価点ごとに質量行列 $[^k M]$ と剛性行列 $[^k K]$ を構築し、固有値問題

$$[^k K] \{\phi_r\} - \omega_r^2 [^k M] \{\phi_r\} = \{0\} \quad (4)$$

を解き、固有振動数 $f_r (= \omega_r / 2\pi)$ と振動モード $\{\phi_r\}$ を得る。得られた固有振動数を基に応答曲面モデルを作成する。作成された応答曲面を用いて α -レベルごとに固有振動数の最小値と最大値を求め、レベルの区間を定める。具体的には、レベルごとのモデルパラメータの区間を側面制約とした次式の最適化問題を解く。

$$\begin{aligned} \min (\max) \quad & f_r^{(j)}(\{p\}) \\ \text{subject to} \quad & \{p\}^L \leq \{p\} \leq \{p\}^U \end{aligned} \quad (5)$$

α -レベルの数だけ式(5)の最適化問題を解く必要があるが、応答曲面を用いることで計算負荷は小さくなる。 j 番目レベルの r 次の固有振動数の区間 $F_r^{(j)}$ は、固有振動数の最大値と最小値から

$$F_r^{(j)} = [\min(f_r^{(j)}), \max(f_r^{(j)})] \quad (6)$$

のように定まる。なお、最大レベル ($j=m$) では、モデルパラメータの代表値の組合せで得られた固有振動数が代表値となる。

$$F_r^{(m)} = f_r^{(m)} \quad (7)$$

最終的には、各レベルの固有振動数の区間を積み重ねることで固有振動数のメンバーシップ関数が得られる。

上記の手順でファジィ FEM 解析が可能となる。しかし、モデルパラメータの変動幅すなわち区間幅が広いとモードの入れ替わりが問題となる。この場合には、適切に固有振動数を入れ替える必要があり、修正を行わないと正確な固有振動数のメンバーシップ関数を得ることができない。本報では、対応するモードを見つけるために MAC (Modal Assurance Criterion) を用いる⁽¹²⁾。

2.3 モデルパラメータの実現可能範囲の推定法 設計の初期段階においては、寸法や材料特性などの代表値だけでなく変動範囲も明確でない場合も多い。その場合には、仮定した固有振動数の変動に対するモデルパラメータの実現可能範囲を知ることも意義がある。そこで、固有振動数の変動範囲が指定されたときに、モデルパラメータの変動範囲を求める方法を提案する。これは、固有振動数を入力ファジィ数、モデルパラメータを出力ファジィ数とした逆問題となる。

入力ファジィ数である固有振動数のメンバーシップ関数は、例えば、Fig.4 に示すように 2.2 節で求めた固有振動数のメンバーシップ関数を基に決める。このようにすることで、2.2 節で構築した応答曲面モデルを利用することが可能になる。 j 番目レベルのモデルパラメータの区間 $P_i^{(j)}$ は、

$$\begin{aligned} {}^{(j)} f_r^L &\leq f_r \leq {}^{(j)} f_r^U \\ {}^{(j)} \{p\}^L &\leq \{p\} \leq {}^{(j)} \{p\}^U \end{aligned} \quad (8)$$

を満足するパラメータの組 $\{p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, \dots, p_n^{(j)}\}$ から

$$P_i^{(j)} = [\min_k (\{p_i^{(j)}\}), \max_k (\{p_i^{(j)}\})] \quad (9)$$

のように決まる。実際は、満足するパラメータの組をすべて求めるのではなく、応答曲面モデルを基に最適化手法でモデルパラメータの最大値と最小値を求める。なお、最大レベル ($j=m$) では、モデルパラメータの代表値をそのまま代表値とする。

Fig.4 The specified membership function of natural frequency

3. 解析例

提案したファジィ FEM 解析法の有用性を検証する。解析例として、Fig.5 に示す簡単な門型のラーメン構造フレームモデルを取り上げる。すべての部材の寸法は長さ $L=0.5\text{m}$ 、幅 $B=5 \times 10^{-2}\text{m}$ 、高さ $H=5 \times 10^{-2}\text{m}$ で、材料特性はヤング率 $E=206\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、密度 $\rho=7850\text{kg/m}^3$ である。なお、各部材ははり要素でモデル化し、分割数は 6 とした。不確定モデルパラメータとしては、上側のはりの左半分の高さと下側のはりの右半分の高さの 2 つ ($n=2$) とした。2 個のモデルパラメータは左右対称な三角型ファジィ数でモデル化した。代表値および上下限値を Table 1 に、代表値での振動モードを Fig.6 に示す。

3.1 固有振動数のメンバーシップ関数 応答曲面モデルを利用することの有用性を示す前に、モードの入れ替わりを修正する必要性と最適化手法による区間解析の必要性を示す。

そのために、頂点法の改良である 3 水準要因計画（モデルパラメータの下限値、代表値、上限値を水準とする）を基礎とした方法でメンバーシップ関数を求める。ここでは、Fig.7 に示すようにパラメータのメンバーシップ関数を 5 つ

Fig.5 Frame model

Table 1 Uncertain model parameters

Parameter	Core value p_i^c [m]	Lower bound p_i^L [m]	Upper bound p_i^U [m]
p_1	0.05	0.025	0.025
p_2	0.05	0.025	0.025

Fig.6 Mode shape of the flame model

Fig.7 Evaluated points for the vertex method

のレベルに分割し、各 α -レベルにおいて 8 点の評価点で FEM 解析を行い、8 点中の固有振動数の最小値、最大値をもとに各レベルの区間幅を定めた。その後、モード次数ごとに整理することで、固有振動数のメンバーシップ関数を得た。また、各 α -レベルにおいて、パラメータの区間を側面制約とした最適化問題を解くことで区間を求め、固有振動数のメンバーシップ関数を得た。

2 つの手法で得られた固有振動数のメンバーシップ関数を Fig.8 に示す。Fig.8(a)と Fig.8(b)が頂点法の結果である。Fig.8(a)がモードの入れ替わりを修正せず、固有振動数の小さい順に整理した場合で、Fig.8(b)がモードの入れ替わりを修正し、整理した場合である。Fig.8(c)は最適化手法の結果である。Fig.8(a)と Fig.8(b)を比較すると、 α -レベルが 3 以下においてモードの入れ替わりが見られる。その結果、明らかに 2 次モードの下限では過大評価、3 次と 4 次モードの下限では過小評価となっている。したがって、モードの入れ替わりを判定し、固有振動数を入れ替える必要があるといえる。しかし、Fig.7(b)においても固有振動数の変化が不自然な箇所が見られる。例えば、2 次モードの下限では、

(a) Vertex method
(before switching natural frequencies) (b) Vertex method
(after switching natural frequencies)

(c) Optimization approach

Fig.8 Membership functions of the natural frequencies

レベル 1 と 0 の固有振動数がレベル 2 より高くなっている。Fig.7(c)の最適化手法の結果を見ると、2 次モードの下限も修正されていることがわかる。このことから、固有振動数の最大値あるいは最小値が頂点に無い場合には、正確なメンバーシップ関数を得るために最適化手法を用いる必要があるといえる。なお、最適化手法においては、最適化実行中にモードの入れ替わりを補正することは困難で、自動的にメンバーシップ関数を求めることができなかった。

3.2 応答曲面モデルを用いたファジィ FEM 応答曲面モデルを利用することの有用性を検討する。

最初に、応答曲面モデルを構築する。ここでは、Fig.8(b)のメンバーシップ関数を求めるときに用いたデータを使用した。このデータは、モードの入れ替わりを修正した後のデータであるので、固有振動数の区間を求める際にモードの入れ替わりを考慮する必要がない。Fig.9 に 3 次多項式を用いて構築された 2 次、3 次、4 次モードの応答曲面を示す。

Fig.9 の応答曲面を基に、最適手法で固有振動数のメンバーシップ関数を求めた。Fig.10 に、得られたメンバーシップ関数を示す (○)。図中には、推定精度の比較として

Fig.8(c)のメンバーシップ関数を示している (Δ)。Fig.10において、2次モードの下限で推定誤差が大きい、それ以外ではよい一致を示している。したがって、3次の応答曲面モデルを用いれば、十分な精度のメンバーシップ関数が得られるといえる。

応答曲面を利用すれば、最適化において固有値解析を実

Fig.9 Response surfaces

Fig.10 Membership functions of the natural frequencies obtained from the RS models

行する必要がなく、さらに勾配を求めるための感動解析も容易に効率的に行なえる。したがって、定量的な評価はしていないが、FEM解析を用いた最適化手法の場合に比べて、計算負荷を大幅に短縮できると考える。なお、応答曲面の構築において、2次モードの下限のように非線形性が高い場合は、多項式モデルではなく Kriging モデル⁽¹³⁾の使用も検討すべきと考える。

3.3 モデルパラメータの実現可能範囲の推定 固有振動数の変動幅を指定したときに、モデルパラメータの実現可能範囲を推定する方法の妥当性を検討する。

ここでは、固有振動数の変動を三角型ファジイ数でモデル化した。Fig.10の固有振動数のメンバーシップ関数を基に定めた代表値および上下限値を Table 2 に示す。(*) 内の値は変動率を意味する。Fig.10のメンバーシップ関数の範囲内で固有振動数の変動幅を指定することで、応答曲面の利用が可能になる。

固有振動数のメンバーシップ関数を5つのレベルに分け、最適手法で各 α -レベルのモデルパラメータの区間を求めた。Fig.11に、得られたモデルパラメータのメンバーシッ

Table 2 Uncertain model parameters

Mode	Core value f_r^C [Hz]	Lower bound f_r^L [Hz]	Upper bound f_r^U [Hz]
2	174.1	165.4 (5%)	191.5 (10%)
3	182.3	154.9 (15%)	191.4 (5%)
4	217.8	185.1 (15%)	228.7 (5%)

Fig.11 Membership functions of the model parameters

ブ関数を示す。図には比較のために、Fig.10 のメンバーシップ関数を求めたときの元のモデルパラメータのメンバーシップ関数を示している。図中の"○"の間が得られたモデルパラメータの区間を表す。Fig.11 が意味することは、パラメータの値が"○"の間にあると、固有振動数の値は Table 2 で指定した区間内に留まることである。モードごとの特徴は、2 次モードの場合、メンバーシップ関数は非対称であるが三角形に近い。さらに p_1 は全体が上限の方に寄っているのに対して p_2 は下限の方に寄っていることである。3 次と 4 次モードの場合は、メンバーシップ関数は三角形とは大きく異なる。さらにレベルが 0 に近くなると変化が複雑になることである。したがって、Fig.11 のようなモデルパラメータのメンバーシップ関数が得られると、モデルパラメータがどのように制約されているかが明確になるなど、実際の設計においてモデルパラメータの許容範囲を設定するときの有用な情報になると考えられる。また、モデルの同定問題においても初期値を設定する有用な情報となる。

このようなモデルパラメータの実現可能範囲を解析することは、ファジィ FEM の新たな適用として有望と考える。なお、固有振動数のメンバーシップ関数を推定するときだけでなく、モデルパラメータのメンバーシップ関数を推定する際にも応答曲面を利用することは、応答曲面の有効な活用になる。

4. 結 言

本報では、不確定性を有する有限要素モデルの固有振動数解析のためのファジィ有限要素解析法について検討した。モデルパラメータの不確定性をファジィ数で表現し、ファジィ演算により固有振動数のメンバーシップ関数を求める。ファジィ演算には、 α -カット法と区間解析法を組み合わせた方法を用いたが、特に、計算コストを低減するために応答曲面を利用した。また、固有振動数を入力ファジィ数、モデルパラメータを出力ファジィ数とした逆問題として、モデルパラメータの実現可能範囲を推定する方法を提案した。解析例で提案したファジィ FEM 解析法の有用性を検討した結果、以下のことが明らかになった。

- (1) 提案する方法で、効率よく十分な精度で固有振動数のメンバーシップ関数を求めることができる。
- (2) 提案する方法で、モデルパラメータのメンバーシップ関数を求めることができる。また、得られたメンバーシップ関数からモデルパラメータの実現可能範囲を推定することが可能になる。
- (3) 応答曲面モデルは、固有振動数およびモデルパラメータのメンバーシップ関数を求める際に、有効に利用できる。なお、モデルパラメータの実現可能範囲を解析することは、ファジィ FEM の新たな適用として有望であると考えられる。

文 献

- (1) S. Nakagiri and T. Hisada, Stochastic Finite Element Method Applied to Eigenvalue Analysis of Uncertain Structural System, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.49, No.438 (1983), pp.239-246.
- (2) M. Arakawa and H. Yamakaya, A Study on Optimum Design Using Fuzzy Numbers as Design Variables (2nd Report, Development of Simple Fuzzy Number Operation and Its Application), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.58, No.550 (1992) pp. 1716-1721.
- (3) S.S. Rao and J.P. Sawyer, Fuzzy Finite Element Approach for the Analysis of Imprecisely Defined Systems, AIAA Journal, 33(12), (1995), 2364-2370.
- (4) D. Moens and D. Vandepitte, Envelope Frequency Response Function Calculation of Uncertain Structures, Proc. of ISMA25, (2000), 395-402.
- (5) D. Moens and D. Vandepitte, Application of the Fuzzy Element Method for Dynamic Analysis of Structures with Uncertain Boundary conditions, Proc. of IMAC2003, (2003).
- (6) M. Hanss and K. Willner, Fuzzy Arithmetical Modeling and Simulation of Vibrating Structures with Uncertain Parameters, Proc. of ISMA2004, (2004), 3079-3096.
- (7) S. Donders, et al., Parameter Uncertainty and Variability in the Structural Dynamics Modeling Process, Proc. of IMAC2003, (2003).
- (8) W. Dong and H.C. Shah, Vertex Method for Computing Functions of Fuzzy Variables, Fuzzy Sets and Systems, 24(1), (1987), 65-78.
- (9) D. Moens and D. Vandepitte, An interval finite element approach for the calculation of envelope frequency response functions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.61, No.14, 2004, pp.2480-2507.
- (10) M. De Munck, D. Moens, W. Desmet and D. Vandepitte, An Automated Procedure for Interval and Fuzzy Finite Element Analysis, Proc. of ISMA2004, (2004), 3023-3033.
- (11) R.H. Myers and D.C. Montgomery, Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- (12) F. Kuratani, et al., Estimation of Rotation Mode Shapes by Use of Numerical Analysis (How to Select Mode Shapes to Be Combined), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.62, No.603 (1996) pp.4205-4211.
- (13) T.W. Simpson, T.M. Mauery, J.J. Korte and F. Mistee, Comparison of response surface and Kriging models for multidisciplinary design optimization, Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NSAS/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis & Optimization, St. Louis, 1998.