103 数値代入法による3～5 自由度系強制振動応答解析と実験

○ 学 成田 正敬(東海大) , 正 尾崎 晃一(東海大)

Forced vibration response analysis of 3-5-degree-of-freedom-system by the numerical value substitution method

Takayoshi NARITA and Koichi OZAKI

Tokai University, 1117, kitakaname, Hiratsuka-shi, Kanagawa, 259-1292 Japan

This paper shows new method to describe forced vibration response of multi-degree-of-freedom system. This method is possible to obtain transmissibility of vibration by manipulating equation of motion without the issue of eigenvalue. The transmissibility we obtained can describe resonance curve in any parameter of multi-degree-of-freedom system. It takes the form of the fraction. The root of the denominator shows the resonance point, and root of the molecule shows the anti-resonance point. It is not considered that it's property to depend on temperature, distortion and frequency. We experimented in order to verify this method. And we compared calculation curve with experimental values. We find that the tendency which is identical for both was obtained. The result of comparison shows that there is validity in this method.

Key Words: Multi-degree-of-freedom system Forced Vibration
Method of Vibration Analysis

現在, 構造物や多自由度系の振動について解析を行う際に, 多くの場合は固有モードの直交性を利用した解析法や、直接数値積分法がとられている。しかし, これらの方法は共振点を求めることはできるが, 強制振動応答を連続的にとらえるには, 数値解析を駆使しなくてはならない。本報告は, 単純な代入計算により振動伝達率を導出する方法を利用し, 多自由度系の振動伝達率を導出した。この方法を利用することにより, 振動系の質量, ばね定数などのパラメータを任意に設定しても, 容易に共振曲線を描くことができる。現時点では20 自由度系まで, 振動伝達率を導出している。本解析手法を用いて, 10 自由度振動系の振動伝達率を求めると, 図 A2 のような曲線になることがわかった。

また, 任意の質点における振動伝達率, 応答倍率, 共振点, 極小の値を示す反共振点について, 解析的に解を求められることが分かった。また, この手法によって求められた解と, 多自由度系の解析解が一致した。

また, 系のパラメータを一定の値にすると, 共振点と反共振点が共振曲線上に現れない現象が起こる場合がある。この現象が, 本解析手法により導出した振動伝達率を用いることにより説明することができることがわかった。

図 A1 のようなばね質量系の, 3 自由度系について, 本解析手法により得られた3 自由度 M_1 系の振動伝達率の簡略式を示すと式(A1)のようになる。これらを解くと, 共振点が3 個, 振動伝達率が0 となる反共振点が2 個存在することが分かる。本解析手法を用いて4 自由度系, 5 自由度系の振動伝達率を導出した。N 自由度系ではN 個の共振点が存在し, 基

礎から t 番目の質量系では, (N-t)個の零反共振点が存在することが分かった。

本報告では3～5 自由度振動系の各質点について振動実験を行い, 実験で得られた共振曲線と, 計算曲線との比較検討を行ったところ, 良い一致が見られたので報告する。

Fig.A1 Equivalent model of multi degree-of-freedom-system

$$T_{3M1} = |X_1^*/X_0^*| = \sqrt{Nu^2/De^2} \quad (A1)$$

$$Nu = a10 - a11 \cdot \Omega^2 + a12 \cdot \Omega^4$$

$$De = a20 - a21 \cdot \Omega^2 + a22 \cdot \Omega^4 - a23 \cdot \Omega^6$$

Fig 2.3 Resonance curve of ten degree-of-freedom-system

1. はじめに

現在、構造物や多自由度系の振動について解析を行う際に、多くの場合は固有モードの直交性を利用した解析法や、直接数値積分法がとられている[1][2][3][4]。しかし、これらの方法は共振点を求めることはできるが、強制振動応答を連続的にとらえるには、数値解析を駆使しなくてはならない。本報告は、単純な代入計算により振動伝達率を導出する方法[5][6]を利用し、多自由度系の振動伝達率を導出した。この方法を利用することにより、質量、ばね定数などのパラメータを任意に設定しても、容易に共振曲線を描くことができる。

また、任意の質点における振動伝達率、応答倍率、共振点、極小の値を示す反共振点について、解析的に解を求められることが分かった。また、この手法によって求められた解と、多自由度系の解析解が一致した。系のパラメータを一定の値にすると、共振点と反共振点が共振曲線上に現れない現象が起こる場合がある。この現象が、本解析手法により導出した振動伝達率を用いることにより説明することができることがわかった。本報告では3～5自由度振動系の各質点について振動実験を行い、実験で得られた共振曲線と、計算曲線との比較検討を行ったところ、良い一致が見られたので報告する。

2. 振動伝達率の導出

図2.1は3自由度振動系の等価モデルである。図中のゴム(R.V.I.)については複素数で定義されている複素ばね定数 k^* を用いて振動解析を行う。

$$k^* = k' + jk'' = k'(1 + j\varepsilon) = k'\delta^* \quad (2.1)$$

k' は動的ばね定数、第二項の k'' は動的損失ばね定数を示し、 j は虚数単位である。 $\varepsilon = k''/k'$ は損失係数(ロスファクタ)を示しており、粘弾性材料の減衰の大きさを表す。 δ^* は実部と虚部を持つ複素数である。複素ばね定数の周波数、振幅、温度依存性は無視している。この複素数の積を以下のように表す。末尾が a の項はこの積の実数部を表し、 b の項は虚数部を表す。

$$\Delta_i^* \delta_j^* = c_{ij}a + c_{ij}b$$

この振動系に対して基礎を強制変位振動 x_0 で加振したとき、 M_1 での変位振動を x_1 、同様に M_2 での変位振動を x_2 、 M_3 での変位振動を x_3 と置くと運動方程式は次式のようにになる。また各質点の複素振幅を X^* とし、式(2.3)のように表す。振動伝達率は式(2.2)をそれぞれに代入、整理し、基礎と各質量の複素振幅の比に変形した式の絶対値で表される。3自由度 M_1 系の振動伝達率を T_{3M1} と表記し、これを求めると式(2.4)が得られる。 μ は質量比、 α はばね定数比、 ω_n は M_1 系の固有角振動数、また Ω を角振動数比とし、 $\Omega = \omega/\omega_n$ と表す。この系の減衰を考慮しない場合は、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ を代入した式で表され、 $c_1a = 1, c_1b = 0, lu = ld = 0$ となる。

Fig 2.1 Equivalent model of three degree-of-freedom-system

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k_1^*(x_0 - x_1) + k_2^*(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k_2^*(x_1 - x_2) + k_3^*(x_3 - x_2) \\ m_3 \ddot{x}_3 &= k_3^*(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} x_0 = X_0^* e^{j\omega t}, x_1 = X_1^* e^{j\omega t} \\ x_2 = X_2^* e^{j\omega t}, x_3 = X_3^* e^{j\omega t} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$T_{3M1} = \left| \frac{X_1^*}{X_0^*} \right| = \sqrt{\frac{Ru^2 + lu^2}{Rd^2 + ld^2}} \quad (2.4)$$

$$Ru = a10 - a11 \cdot \Omega^2 + a12 \cdot \Omega^4$$

$$lu = b10 - b11 \cdot \Omega^2 + b12 \cdot \Omega^4$$

$$Rd = a20 - a21 \cdot \Omega^2 + a22 \cdot \Omega^4 - a23 \cdot \Omega^6$$

$$ld = b20 - b21 \cdot \Omega^2 + b22 \cdot \Omega^4$$

$$a10 = a20 = c_{123}a, \quad b10 = b20 = c_{123}b$$

$$a11 = c_{12}a \cdot \gamma_1 \gamma_2 + c_{13}a \cdot \gamma_1 (1 + \mu_2)$$

$$b11 = c_{12}b \cdot \gamma_1 \gamma_2 + c_{13}b \cdot \gamma_1 (1 + \mu_2)$$

$$a12 = c_{1a} \cdot \gamma_1^2 \gamma_2, \quad b12 = c_{1b} \cdot \gamma_1^2 \gamma_2$$

$$a21 = a11a + c_{23}a(1 + \mu_1 + \mu_1 \mu_2)$$

$$b21 = a11b + c_{23}b(1 + \mu_1 + \mu_1 \mu_2)$$

$$a22 = a12$$

$$+ c_{2a} \cdot \gamma_1 \gamma_2 (1 + \mu_1) + c_{3a} \cdot \gamma_1 (1 + \mu_2)$$

$$b22 = b12$$

$$+ c_{2b} \cdot \gamma_1 \gamma_2 (1 + \mu_1) + c_{3b} \cdot \gamma_1 (1 + \mu_2)$$

$$a23 = \gamma_1^2 \gamma_2$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{M_2}{M_1}, \mu_2 = \frac{M_3}{M_2}, \alpha_1 = \frac{k_2'}{k_1'}, \alpha_2 = \frac{k_3'}{k_2'} \\ \gamma_1 = \frac{\mu_1}{\alpha_1}, \gamma_2 = \frac{\mu_2}{\alpha_2}, \omega_n = \sqrt{\frac{k_1'}{M_1}} \end{cases}$$

$$T_{3M2} = \left| \frac{X_1^*}{X_0^*} \right| = \sqrt{\frac{Ru^2 + lu^2}{Rd^2 + ld^2}} \quad (2.5)$$

$$Ru = a'10 - a'11 \cdot \Omega^2, lu = b'10 - b'11 \cdot \Omega^2$$

$$Rd = a20 - a21 \cdot \Omega^2 + a22 \cdot \Omega^4 - a23 \cdot \Omega^6$$

$$ld = b20 - b21 \cdot \Omega^2 + b22 \cdot \Omega^4$$

$$a'10 = c_{123}a, b'10 = c_{123}b$$

$$a'11 = c_{12}a \cdot \gamma_1 \gamma_2, b'11 = c_{12}b \cdot \gamma_1 \gamma_2$$

$$T_{3M3} = \left| \frac{X_3^*}{X_0^*} \right| = \sqrt{\frac{Ru^2 + lu^2}{Rd^2 + ld^2}} \quad (2.6)$$

$$a''_{10} = c_{123}a, b''_{10} = c_{123}b$$

$$Ru = a''_{10}, lu = b''_{10}$$

$$Rd = a_{20} - a_{21} \cdot \Omega^2 + a_{22} \cdot \Omega^4 - a_{23} \cdot \Omega^6$$

$$ld = b_{20} - b_{21} \cdot \Omega^2 + b_{22} \cdot \Omega^4$$

Fig. 2.2 Resonance curve of T_{3M1} , T_{4M1} , and T_{5M1} Fig. 2.3 Resonance curve of T_{10M1}

ただし、両式における分母の実数部 Rd 、虚数部 ld は T_{3M1} の式と同じになるため、省略する。

数値代入法を用いて、 T_{4M1} 、 T_{5M1} を導出した。ただし、式が長くなるので簡略式のみ、式(2.7)、(2.8)として示す。 T_{4M1} では分母が 8 次式で分子が 6 次式、 T_{5M1} は分母が 10 次式で分子が 8 次式になっている。

数値代入法によって導出した 3 自由度系から 5 自由度系の振動伝達率を図 2.2 として示す。3 自由度系は 3 つの共振点と 2 つの反共振点、4 自由度系は 4 つの共振点と 3 つの反共振点、5 自由度系は 5 つの共振点と 4 つの反共振点が存在する。

この方法を用いることにより、現時点では 20 自由度系までの振動伝達率を導出することができる。一例として、 T_{10M1} 、 T_{10M10} を図 2.3 として示す。両者とも、共振点が 10 個であるが、 T_{10M1} は反共振点が全て 0 になっているが、 T_{10M10} は反共振点で 0 にならない。パラメータは任意の数値であるが、本解析手法はどのような条件であっても容易に共振曲線を描くことができる。

$$T_{4M1} = \left| \frac{X_1^*}{X_0^*} \right| = \sqrt{\frac{Nu^2}{De^2}} \quad (2.7)$$

$$Nu = a_{10} - a_{11} \cdot \Omega^2 + a_{12} \cdot \Omega^4 - a_{13} \cdot \Omega^6$$

$$De = a_{20} - a_{21} \cdot \Omega^2 + a_{22} \cdot \Omega^4 - a_{23} \cdot \Omega^6 + a_{24} \cdot \Omega^8$$

$$T_{5M1} = \left| \frac{X_1^*}{X_0^*} \right| = \sqrt{\frac{Nu^2}{De^2}} \quad (2.8)$$

$$Nu = a_{10} - a_{11} \cdot \Omega^2 + a_{12} \cdot \Omega^4$$

$$-a_{13} \cdot \Omega^6 + a_{14} \cdot \Omega^8$$

$$De = a_{20} - a_{21} \cdot \Omega^2 + a_{22} \cdot \Omega^4$$

$$-a_{23} \cdot \Omega^6 + a_{24} \cdot \Omega^8 - a_{25} \cdot \Omega^{10}$$

3 3～5 自由度振動系の理論解析

系に減衰がない場合に、式(2.4)の分母=0 のとき、その解がこの系の共振点である。この振動伝達率の分母の式を共振式とする。この 6 次方程式を解くと、正の実数となる有意な解が 3 つ存在する。つまりこの 3 自由度系は 3 つの共振点を持つ。4 自由度系の共振式について同様に解くと共振点は 4 つ、5 自由度系では 5 つの共振点をもつことが分かる。式(2.4)の分子は 4 次式であり、分子=0 となるとき、振動伝達率は 0 になる。この分子の式を反共振式とし、反共振点の中でも特に極小値で振動伝達率が 0 となる点を零反共振点とする。この反共振式を解くと、有意な解が 2 つ存在し、零反共振点が 2 つ存在する。4 自由度系、5 自由度系についても同様に考えることができる。 T_{4M1} の共振式は 8 次式となり共振点が 4 つ、反共振式は 6 次式となり零反共振点が 3 つである。 T_{5M1} の共振式は 10 次式となり共振点が 5 つ、反共振式は 8 次式となり零反共振点が 4 つである。

他の質点の振動伝達率、式(2.5)、(2.6)について、共振式が同じになることはすでに述べた。この系の全ての質点における振動伝達率を考慮しても、共振点の振動数は同一である。

反共振式は M_2 系の式(2.5)では 2 次式、 M_3 系の式(2.6)においては定数項である。これを解くと有意な解の数は 1 個、0 個となり、 M_2 系では零反共振点が 1 つ、 M_3 系では反共振点は存在しない。図 3.1 に各質点の振動伝達率を示す。3 つの共振曲線は、共振点は一致しているが反共振点は全て異なる値をとる。

また、系の質量比、ばね定数比が全て 1 である場合、 M_1 系の反共振式と 2 自由度系の共振式、 M_2 系の反共振式は 1 自由度系の共振式と完全に一致し、それぞれの共振点と零反共振点は完全に一致する。

図 3.2 に T_{3M1} 、 T_{4M1} 、 T_{5M2} を示す。 T_{4M1} 、 T_{5M2} の零反共振点と、 T_{3M1} の共振点が一致していることが分かる。

つまり、この条件では、N 自由度系の t 番目の質量における反共振式は(N-t)自由度系の共振式と一致する。

t = N となると、反共振式は定数項となり、零反共振点は存在しない。

分母に共振を表す式、分子に反共振を表す式をおくことによって振動伝達率を表現する方法により説明できる例として、4 自由度 M_3 系について述べる。 T_{4M3} の簡略式は式(3.1)のようになる。この式は共振点を 4 つ、零反共振点を 1 つもつ式であることが想定される。しかし、質量比、ばね定数比をすべて 1 にした場合の共振曲線を図 3.3 に示すと、共振点が 3 つ、零反共振点が存在しない。さらに 1 つ目の共振と 2 つ目の共振との間隔が大きく開いている。 T_{4M3} の共振式と反共振式の解を式(3.2)として示す。

解の数は共振式では 4 つ、反共振式では 1 つである。反共振式の解と共振式の 2 つ目の解が同じになっている。 T_{4M3} は式の構造上、式(3.3)のように書き改めることができるはずである。この式で分母の項と分子の項の解が重なることがあれば、それらの項は消去され、共振点 3 つ、零反共振点が 0 個の式になり、図 3.3 の共振点が消える現象を説明することができる。これは、共振と反共振の式を同時に表現する本解析手法によって初めて説明できるもので、従来の固有値を求める手法による共振点を導出する方法では反共振を考慮していないため、この現象を説明することができないといえる。

Fig 3.4 Resonance curve of T_{3M2} ($\alpha_1 = 1.00$)

Fig 3.5 Resonance curve of T_{3M2} ($\alpha_1 = 0.90$)

Fig 3.2 Resonance curve of T_{3M1} , T_{4M1} and T_{5M2}

Fig 3.3 Resonance curve of T_{4M3}

$$T_{4M3} = \frac{|X_1^*|}{|X_0^*|} = \sqrt{\frac{Nu^2}{De^2}} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} Nu &= a_{10} - a_{11} \cdot \Omega^2 \\ De &= a_{20} - a_{21} \cdot \Omega^2 + a_{22} \cdot \Omega^4 \\ &\quad - a_{23} \cdot \Omega^6 + a_{24} \cdot \Omega^8 \\ Nu: \Omega &= 1.00 \\ De: \Omega &= 0.35, 1.00, 1.53, 1.88 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$T_{4M3} = \frac{(\Omega - \Omega_1^2)}{(\Omega - \Omega_1^2)(\Omega - \Omega_2^2)(\Omega - \Omega_3^2)(\Omega - \Omega_4^2)} \quad (3.3)$$

$$\Omega_{Ns} = 2 \sin\left(\frac{2s-1}{2(2N+1)}\right) \quad (s: 1 \sim N) \quad (3.4)$$

$$\Omega_{11} = 2 \sin\left(\frac{1}{6}\right) = 1.00 \quad (3.5)$$

$$\Omega_{41} = 2 \sin\left(\frac{1}{18}\right) = 0.35$$

$$\Omega_{42} = 2 \sin\left(\frac{3}{18}\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{6}\right) = 1.00$$

$$\Omega_{43} = 2 \sin\left(\frac{5}{18}\right) = 1.53$$

$$\Omega_{44} = 2 \sin\left(\frac{7}{18}\right) = 1.88$$

式(3.2)は共振式、反共振式を多項式として解いたものだが、系の質量比、ばね定数比がすべて1であれば、式(3.4)を用いて解析的に共振点を求めることができる[7]。この計算式を用いるとN自由度系におけるN個全ての共振点を求めることができる。この条件のとき、t番目の質量における反共振式は、(N-t)自由度系の共振式と同じになることは先に述べた。このことから、この場合の4自由度 M_3 系の零反共振点は1自由度系の共振点と同じになる。式(3.4)を用いてそれぞれ共振点、零反共振点を求めると、式(3.5)ようになる。結果、 Ω_{11} と Ω_{42} は同じ数値になった。つまり、本解析手法により求めた共振式、反共振式の解と、式(3.4)より求めた解は全く同じ値となった。

しかし、パラメーターが全て1という条件以外の場合でも、パラメーターを一定の値にすると、共振点と反共振点が一致する場合が起こり得る。3自由度 M_2 系で $\mu_1 = 0.5$ とし、それ以外のパラメーターを1とした場合の共振曲線を図3.4に示すと、共振点が2つしか存在していない。

図3.4の条件で、 $\alpha_1 = 0.90$ としたグラフを図3.5に示す。この現象は起こらず、共振点、反共振点が表れていることが分かる。ただし、値が一定値に近づけば近づくほど、2点は接近する。

4. 3～5自由度振動系の振動実験

実験装置の概略図を図4.1に示す。製作した実験装置を図4.2に示す。この装置を加振機で加振し、各質量に加速度センサを設置し、入力と出力の比から各質量の振動伝達率を測定する。本実験装置は準備実験により安定した波形が出力できることを確認している。本装置を用いて、加速度振幅0.1Gで5～80Hzの範囲で加振し、測定された共振曲線と、計算により求めた共振曲線を比較した。

3自由度 M_1 系、 M_2 系、 M_3 系の理論値と実験値の比較を図4.3、4.4、4.5に示す。これらは実験値と計算値がほぼ一致しており、零反共振点が2個、1個、0個となっている。さらに、これらの実験値をまとめたものを図4.6として示す。理論式の示す通り、各質点の共振点が一致していることが分かる。逆に、反共振点はすべて異なる値であることも分かる。次に4自由度 M_1 系、5自由度 M_1 系の共振曲線を図4.7、4.8に示す。それぞれ、共振点が4個、5個出ていることが分かる。また、 M_1 系なので零反共振点はそれぞれ3個、4個であり、それぞれの場所は理論曲線とほとんど一致している。図4.7は高次の周波数で実験と計算曲線に誤差が生じているが、摩擦や、実験装置の精度によるものと思われる。

前章で述べた質量比、ばね定数比が全て1の場合の、4自由度 M_3 系を図4.9として示す。実験値と計算値の傾向はほぼ一致している。

Fig.4.1. Experimental apparatus of three, four and five degree-of-freedom-sysytems

Fig.4.2 Comparison of calculation curve and experimental values

Fig.4.3 Comparison of calculation curve and experimental values

Fig.4.4 Comparison of calculation curve and experimental values

Fig.4.5 Comparison of calculation curve and experimental values

Fig.4.6 experimental values (T_{3M1} , T_{3M2} and T_{3M3})

Fig. 4.7 Comparison of calculation curve and experimental values

Fig. 4.8 Comparison of calculation curve and experimental values

Fig.4.9 Comparison of calculation curve and experimental values

5. まとめ

運動方程式を代入、整理し、振動伝達率を導出する、数値代入法による3～5自由度系強制振動応答解析により、以下のことが明らかになった。

- (1)、数値代入法を用いることにより、任意のパラメーターの3～5自由度振動系における任意の質点の強制振動応答について、共振点だけでなく、振動伝達率を導出することにより、強制振動応答を共振曲線としてとらえることができた。
- (2)、実験結果と理論曲線がほぼ一致したことから、数値代入法により求めた振動伝達率が、強制振動応答解析に有用であるとわかった。
- (3)、本解析手法により導出された振動伝達率式の分母が共振、分子が零反共振点を表す。
- (4)、質量比、ばね定数比が全て1である場合は、共振式、反共振式で得られた数値解は、三角関数を用いた方法により得られた解析解と完全に一致する。
- (5)、振動伝達率の分母と分子に共通の解が存在する場合、振動伝達率のグラフにおいて共振点、零反共振点は現れなくなる現象が本解析手法を以て説明することができた。

参考文献

- [1] 藤田、振動工学、(2005)、113-137、森北出版
- [2] 背戸・丸山、振動工学、(2002)、201-232、森北出版
- [3] 背戸、構造物の振動制御、(2006)、79-92、コロナ社
- [4] E.C.ペステル・F.A.レギー、マトリクス法による振動解析、(1984)、丸善
- [5] 尾崎、第13期関東支部総会講演論文集、(2007)、471-472、日本機械学会
- [6] 成田、尾崎、第14期関東支部総会講演論文集、(2008)、471-472、日本機械学会
- [7] 神保 機械工学演習、(1968)、75-76、学献社