105 ウェーブレット 自己相関関数を用いた不規則信号の時系列解析

Time Series Analysis of Random Signals Using Wavelet Autocorrelation Function

○正 田村 晋司 (東工大) 学 上田 泰士 (東工大院)
正 木村 康治 (東工大)

Shinji TAMURA, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo

Taishi UEDA, Tokyo Institute of Technology

Koji KIMURA, Tokyo Institute of Technology

Wavelet autocorrelation function is proposed in this paper. After Cooley and Tukey developed the algorithm of fast fourier transform, the power spectral density is used in various field to obtain the frequency components of stationary signals. Autocorrelation function is derived as inverse fourier transform of the power spectral density. In the autocorrelation function, the noise components of target signal are reduced, although the periodic components still remain. In this study, autocorrelation function of wavelet transform is proposed for time series analysis of nonstationary signal, and its ability for noise suppression is investigated.

Key Words : Time Series Analysis, Continuous Wavelet Transform, Autocorrelation Function

A1. 緒論

高速フーリエ変換が Cooley and Tukey により開発されてから、定常信号の周波数成分を調べる手段としてパワースペクトル密度が様々な領域で用いられている。また、周波数成分が時間とともに変化する信号については、時間-周波数を局在化するウェーブレット変換により、瞬時周波数を読み取ることが可能である。

本研究では、パワースペクトル密度の逆フーリエ変換である自己相関関数が時間平均により信号の雑音成分を抑制するという性質を持つことに着目し、ウェーブレット自己相関関数を提案して、その性質を調べることを目的とする。

A2. ウェーブレット 自己相関関数

関数 $x(t)$ に対して、マザーウェーブレット $\psi(t)$ による連続ウェーブレット変換は次式で定義される。

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^*\left(\frac{u-b}{a}\right) x(u) du \dots\dots (A1)$$

パラメータ a と b はスケールパラメータとシフトパラメータであり、それぞれ $x(t)$ の周期と時間に対応する。パラメータ a, b が持つ上記の意味より、本研究では $T > 0$ として以

Fig. A1 Sine waves with noise

Fig. A2 Repeated chirp signal with noise

下のように a, b の変数変換を行う。

$$C_x(T, t) = C(2\pi\omega_d T, t) \dots\dots\dots (A2)$$

ここで、 ω_d はマザーウェーブレット $\psi(t)$ の卓越角振動数である。また、解析対象は離散的で有限長の時系列であるので、式 (A1) の積分は総和に帰着し、結局次式となる。

$$C_x(T, t_j) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi\omega_d T}} \sum_{m=0}^{N-1} \psi^*\left(\frac{t_m - t_j}{2\pi\omega_d T}\right) x(t_m) \dots (A3)$$

連続ウェーブレット変換結果に対して周期成分を強調することを考え、 $\tilde{C}_x(T, t_j)$ は $C_x(T, t_j)$ を繰り返す信号として、本研究では次式によるウェーブレット自己相関関数を定義する。

$$R_w(T, \tau_l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} C_x(T, t_j) \tilde{C}_x(T, t_j + \tau_l) \dots\dots (A4)$$

A3. 結果と考察

(1) 周期 3.0sec と 5.0sec の正弦波、(2) 0.1Hz~0.5Hz のスイープを周期 30sec で繰り返す信号の 2 つを取り上げ、これらに雑音が付加された場合の計算例を図 A1, A2 に示す。(a),(b) はそれぞれ、ウェーブレット変換とウェーブレット自己相関関数を表す。縦軸が周期 T 、横軸が着目時間 t であり、緑が 0、赤と青がそれぞれ正と負の値を示す。

これらの結果よりウェーブレット変換では雑音の影響が大きいため信号の特徴が現れていないが、ウェーブレット自己相関関数では雑音の影響が小さくなり、正弦波の場合では周期成分を表す縞が現れ、繰り返されるスイープ波の場合には値が変化する部分の周期と縦方向の幅が、それぞれスイープの繰り返し周期とスイープ周波数の範囲に対応していることが分かる。

A4. 結論

ウェーブレット自己相関関数を定義し、雑音が付加された信号の時系列解析を行った。解析例より得られたウェーブレット自己相関関数の特徴を以下に示す。

- 元の信号の定常的な周波数成分は、正負を繰り返す縞として現れる。
- 信号が繰り返されるスイープ波の解析では、スイープ波の繰り返し周期とスイープ周波数の範囲がそれぞれ異なった変化として現れる。

1. 緒論

高速フーリエ変換が Cooley and Tukey⁽¹⁾により開発されてから、定常信号の周波数成分を調べる手段としてパワースペクトル密度が様々な領域で用いられている。また、パワースペクトル密度のフーリエ逆変換として自己相関関数が得られ、この自己相関関数はある時点の信号から将来の信号がどの程度予測できるかの指標となる⁽²⁾が、パワースペクトル密度に比べると利用されることは少ない。

パワースペクトル密度は信号の定常的な周波数成分を読み取るために用いられるが、周波数成分が時間とともに変化する信号については、時間-周波数を局在化するウェーブレット変換⁽³⁾により、瞬時周波数を読み取ることが可能である⁽⁴⁾。また、ウェーブレット変換は異常信号の検出など様々な分野に用いられている⁽⁴⁾。著者らも以前、非線形振動系の励振と応答のウェーブレット変換の積を取ることでよりその位相差を正負として表す指標を提案⁽⁵⁾し、確率的ジャンプ現象の性質を調べた⁽⁶⁾。

本研究では、自己相関関数が時間平均により信号の雑音成分を抑制するという性質を持つことに着目し、ウェーブレット自己相関関数を提案して、その性質を調べることとする。

2. フーリエ変換による時系列解析

まず、従来のフーリエ変換をベースとした時系列解析について述べる。

解析対象を以下のようなデータ数 N 、サンプリング周期 Δt の信号 $x(t_j)$ とする。

$$x(t_j), \quad t_j = j\Delta t, \quad j \in [0, N-1] \dots \dots \dots (1)$$

$x(t_j)$ に対する離散フーリエ変換を次式で定義する。

$$X(\omega_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \exp\left(-\frac{2\pi i j k}{N}\right) \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 ω_k は以下の式で離散化された周波数であり、

$$\omega_k = k\Delta\omega, \quad k \in [0, N-1], \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t} \dots \dots \dots (3)$$

i は虚数単位である。フーリエ変換されたデータ $X(\omega_k)$ に対して、パワースペクトル密度 $S_X(\omega_k)$ は次式で定義される。

$$S_X(\omega_k) = X^*(\omega_k) X(\omega_k) \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $*$ は複素共役を意味する。このようにして得られるパワースペクトル密度により、信号の各周波数成分の強さを知ることが容易となるので、様々な分野で広く用いられている。

一方、パワースペクトル密度 $S_X(\omega_k)$ を逆フーリエ変換すると自己相関関数 $R_X(\tau_l)$, $\tau_l = l\Delta t$ が得られる。

$$R_X(\tau_l) = \mathcal{F}^{-1} S_X(\omega_k) = \sum_{k=0}^{N-1} S_X(\omega_k) \exp\left(\frac{2\pi i k l}{N}\right) \dots \dots \dots (5)$$

この自己相関関数 $R_X(\tau_l)$ は、下記のように時間 τ_l 離れた $x(t_j)$ と $x(t_j + \tau_l) = x(j\Delta t + l\Delta t)$ の積の時間平均という物理的な意味を持つ。

$$R_X(\tau_l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \tilde{x}(t_{j+l}) \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 $\tilde{x}(t_j)$ は $x(t_j)$ を繰り返す信号として、次式で定義される量である。

$$\tilde{x}(t_j) = \begin{cases} x(t_j), & 0 \leq j < N \\ x(t_{j-N}), & N \leq j < 2N \end{cases} \dots \dots \dots (7)$$

この自己相関関数はそのフーリエ変換であるパワースペクトル密度に比べると注目されることは少ないが、以下の特徴を持つと考えられる。

- 元の信号の支配的な周期が反映される。
- 時間平均を取っていることより非周期成分が小さくなるので、信号の周期成分が強調される。

これらの特徴に着目し、本研究では連続ウェーブレット変換結果に対して自己相関関数を求め、その性質を調べる。

3. ウェーブレット変換による時系列解析

3.1 連続ウェーブレット変換 関数 $x(t)$ に対して、マザーウェーブレット $\psi(t)$ による連続ウェーブレット変換は次式で定義される。

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^*\left(\frac{u-b}{a}\right) x(u) du \dots \dots \dots (8)$$

パラメータ a と b はそれぞれ、スケールパラメータとシフトパラメータであり、関数 $\psi(t)$ をそれぞれ、拡大・縮小、平行移動させるパラメータである。 b の値により、関数 ψ は時間軸方向に平行移動される。また、 a の値が小さいときは、関数 ψ の幅が狭くなり関数 $x(t)$ の高振動数/短周期に対応し、 a の値が大きいときは、関数 ψ の幅が広くなり関数 $x(t)$ の低振動数/長周期に対応する。

パラメータ a, b が持つ上記の意味より、本研究では $T > 0$ として以下のように a, b の変数変換を行う。

$$\begin{aligned} C_x(T, t) &= C(2\pi\omega_d T, t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_d T}} \psi^*\left(\frac{u-t}{2\pi\omega_d T}\right) x(u) du \dots \dots (9) \end{aligned}$$

ここで、 ω_d はマザーウェーブレット $\psi(t)$ の卓越角振動数である。式 (9) の変数変換を行うことで、 $C_x(T, t)$ の値は時刻 t における周期 T の成分を示すこととなる。

また、解析対象は離散的で有限長の時系列であるので、式 (9) の積分は総和に帰着し、結局次式となる。

$$C_x(T, t_j) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi\omega_d T}} \sum_{m=0}^{N-1} \psi^*\left(\frac{t_m - t_j}{2\pi\omega_d T}\right) x(t_m) \dots \dots (10)$$

マザーウェーブレット $\psi(t)$ として何を用いるかによって、ウェーブレット変換の結果が異なる。本研究では、Matlab[®] の Wavelet Toolbox で利用できるマザーウェーブレットの内、著者らの以前の研究⁽⁵⁾において、信号の周波数特性が鮮明に表れることが示された Morlet ウェーブレットを用いる。Morlet ウェーブレットは本来は複素数で定義される⁽³⁾が、本研究では以下の実部のみを用いた。

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \cos 5t \dots \dots \dots (11)$$

式 (11) より、Morlet ウェーブレットでは $\omega_d = 5$ である。

3.2 ウェーブレット自己相関関数 2 節で述べた自己相関関数の特徴に着目し、連続ウェーブレット変換結果に対して周期成分を強調することを考え、本研究では次式によるウェーブレット自己相関関数を定義する。

$$R_W(T, \tau_l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} C_x(T, t_j) \tilde{C}_x(T, t_j + \tau_l) \dots \dots (12)$$

ここで、 $\tilde{C}_x(T, t_j)$ は式 (7) で定義される、 $C_x(T, t_j)$ を繰り返す信号である。

実際の式 (12) の計算は、2 節で述べたパワースペクトルと自己相関関数の関係を用いて、周期 T の値一つずつに対して $C_x(T, t_j)$ のパワースペクトルを求め、その逆フーリエ変換を行って求める。

Fig. 1 Sine waves with noise

4. 結果と考察

4.1 正弦波の解析 まず、正弦波に雑音が足し合わされた場合についての計算結果を示す。

解析対象として、周期3.0secと5.0secの正弦波を取り上げる。計算では、時間刻み0.1secで8192点のデータを用いた。図1に時系列を示す。(a), (b)は雑音が加わる前の正弦波、

Fig. 2 Power spectral density of sine waves with noise

Fig. 3 Autocorrelation function of sine waves with noise

Fig. 4 Wavelet transform of sine waves with noise

Fig. 5 Wavelet autocorrelation function of sine waves with noise

Fig. 6 Repeated chirp signal with noise ($\Delta t = 0.1[\text{sec}]$)

(c) は付加した雑音, (d) が解析対象の信号である. 図 2, 3 にそれぞれ, パワースペクトル密度と自己相関関数を示し, 図 4, 5 にそれぞれ, ウェーブレット変換とウェーブレット自己相関関数を示す. 図 4, 5 では, 縦軸が周期 T , 横軸が着目時間 t を表し, 緑が 0 であり, 赤と青がそれぞれ正と負の値を示す.

図 1(d) の時系列では, 周期成分はまったく分からないが, 図 2 のパワースペクトル密度では 0.2Hz と 0.33Hz に鋭いピークが現れることより, 3.0sec と 5.0sec の周期成分が元の信号に含まれることは明らかである. 一方, 図 3 の自己相関関数からは, 元の信号に周期的な成分が含まれていることが分かるが, パワースペクトル密度に比べるとその周期を読み取るのは難しい.

図 4 のウェーブレット変換では雑音の影響が大きく, 元の信号の周期的な成分を反映しているとは言えない. 一方, 図 5 のウェーブレット自己相関関数ではノイズの影響が小さくなり, 周期 $T = 3, T = 5$ 付近において正負を繰り返す縞模様が現れる. これは, 元の信号に周期が $2.7 \sim 3.2\text{sec}$ と $4.3 \sim 5.8\text{sec}$ の信号が定常的に含まれることを示している. しかし, 縞模様が縦方向に幅を持つので, 特定した周期の

Fig. 7 Power spectral density of repeated chirp signal with noise ($\Delta t = 0.1[\text{sec}]$)

Fig. 8 Autocorrelation function of repeated chirp signal with noise ($\Delta t = 0.1[\text{sec}]$)

値にもある程度の幅を持つことは避けられない. そのため, 定常的な正弦波の時系列解析ではパワースペクトル密度が, 元の信号の周期成分を一番明瞭に表現している.

以上の雑音が加わった正弦波に対して, フーリエ変換とウェーブレット変換による時系列解析の結果をまとめると以下となる.

- 元の信号に周期成分が含まれていることを表すことができるのは, パワースペクトル密度, 自己相関関数, ウェーブレット自己相関関数である.
- パワースペクトル密度では周期成分の周波数を特定するのは容易だが, それに比べると自己相関関数では周期成分の周期を特定することが難しい.
- ウェーブレット自己相関関数から周期特性を読み取ることはできるが, 特定した周期の値に幅を持つことは避けられない.
- 定常的な正弦波の時系列解析ではパワースペクトル密度が, 元の信号の周期成分を一番明瞭に表現している.

4.2 繰り返されるスイープ波の解析 次に, 繰り返されるスイープ波に雑音が足し合わされた場合についての計算結果を示す.

解析対象として, $0.1\text{Hz} \sim 0.5\text{Hz}$ のスイープを周期 30sec で繰り返す信号を取り上げる. 図 6 に時系列を示す. (a) は雑音が加わる前のスイープ波, (b) は付加した雑音, (c) が解析対象の信号である. 図 7, 8 にそれぞれ, パワースペクトル密度と自己相関関数を示し, 図 9, 10 にそれぞれ, ウェーブレット変換とウェーブレット自己相関関数を示す. 図 6~10 では, 時間刻み 0.1sec で 8192 点のデータを用いた.

Fig. 9 Wavelet transform of repeated chirp signal with noise ($\Delta t = 0.1[\text{sec}]$)

Fig. 10 Wavelet autocorrelation function of repeated chirp signal with noise ($\Delta t = 0.1[\text{sec}]$)

図 7 のパワースペクトル密度では明瞭なピークは現れず、スイープ周波数範囲の内外での変化は見られない。また、図 8 の自己相関関数でも特に大きな特徴は現れていない。また、ウェーブレット変換の図 9 でも顕著な特徴は現れていない。

一方、ウェーブレット自己相関関数の図 10 では、図 5 とは異なり、帯状の領域は見られないが、その代わりに周期 30sec で繰り返す周期的な変化があることが分かる。このことより、元の信号の周波数成分は定常ではなく時間とともに変化し、周期 30sec で繰り返していることが読み取れる。また、その成分は周期 2sec~9sec の間で広がっているため、元の信号にはこれらの周期成分が含まれることが推測される。

時間刻みが 1/4 の 0.025sec で 32768 点のデータを用いた場合について、パワースペクトル密度、自己相関関数およびウェーブレット自己相関関数の結果を、図 11-13 に示す。図 11 では、スイープ範囲の周波数である 0.2~0.4Hz においてピークが現れており、また、自己相関関数(図 12)では、微小ではあるが周期 30sec を持つパターンが現れている。よって、時間刻みを細かくするとパワースペクトル密度と自己相関関数からスイープ周波数とスイープ周期を読み取ることが可能となることが分かる。一方、この時間刻み 0.025sec におけるウェーブレット自己相関関数(図 13)では、時間刻み 0.1sec の図 10 に比べると信号の特徴を表すパターンが明瞭になっているが、グラフから読み取れる内容に大きな違いはないと言える。したがって、パワースペクトル密度と自己相関関数に比べると、ウェーブレット自己相関関数では粗い時間刻みで信号の特徴を捉えることができることが分かる。

Fig. 11 Power spectral density of repeated chirp signal with noise ($\Delta t = 0.025[\text{sec}]$)

Fig. 12 Autocorrelation function of repeated chirp signal with noise ($\Delta t = 0.025[\text{sec}]$)

Fig. 13 Wavelet autocorrelation function of repeated chirp signal with noise ($\Delta t = 0.025[\text{sec}]$)

繰り返されるスイープ波に対して、フーリエ変換とウェーブレット変換による時系列解析の結果をまとめると以下となる。

- パワースペクトル密度、自己相関関数、ウェーブレット変換から、元の信号の特性を読み取ることは困難である。
- ウェーブレット自己相関関数では、元の信号の特性を表す周期的な変化が現れ、その変化の様子から以下の性質を読み取ることができる。
 - 周波数は定常ではなく、時間とともに変化している。
 - 変化の周期より、スイープの繰り返し周期
 - 縦方向の幅より、信号のスイープ周波数の範囲。
- ウェーブレット自己相関関数では粗い時間刻みの信号でもその信号の特徴を読み取ることが可能だが、パワースペクトル密度、自己相関関数では、信号の時間刻みを細

かくしなければ信号の特徴を読み取ることができない。

5. 結論

ウェーブレット自己相関関数を定義し，雑音が付加された信号の時系列解析を行った．解析例より得られたウェーブレット自己相関関数の特徴を以下に示す．

- 元の信号の定常的な周波数成分は，ウェーブレット自己相関関数において正負を繰り返す縞として現れる．
- 信号の周波数特性が定常である正弦波である場合，ウェーブレット自己相関関数により周波数成分を特定できるが，パワースペクトル密度に比べると特定した周波数成分に幅を持つ．
- 信号が繰り返されるスイープ波の場合，ウェーブレット自己相関関数では以下の信号の特徴がそれぞれ異なった変化として現れる．
 - － 元の信号に定常的な周波数成分が含まれないこと．
 - － スイープ波の繰り返し周期．
 - － スイープ周波数の範囲．
- パワースペクトル密度，自己相関関数に比べると，ウェーブレット自己相関関数では粗い時間刻みで信号の特徴を捉えることが可能である．

文 献

- (1) Cooley, J. W. and Tukey, J. W., *Mathematics of Computation*, **19**, (1965), 297–301.
- (2) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, (1993), John Wiley & Sons, New York, 2nd edition.
- (3) Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, (1992), Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- (4) Addison, P. S., *The Illustrated Wavelet Transform Handbook*, (2002), IOP Publishing, Bristol, England.
- (5) 田村・土屋・木村, 機論, **73**–728, C(2007), 1029–1036.
- (6) 田村・鈴木・木村, 機講論, No. 07–8, (2007), 231.