131 複数振動子による吊橋振動

Suspension Bridge Vibration due to Oscillators

○正 長 嶺 拓 夫 (埼玉大) 正 森 博 輝
学 茂 木 知 之 正 佐 藤 勇 一

Takuo NAGAMINE, Saitama University, 255 Shimo-okubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama
Hiroki MORI, Saitama University
Tomoyuki MOTEGI, Saitama University
Yuichi SATO, Saitama University

In this paper, we describe the coupled vibration of oscillators mounted on a plate hanging on four strings and investigate the effects of damping on such vibration. From the experimental and numerical simulation results, the following result was obtained. There is an area of parameters, which produce the small amplitude of the support vibration.

Key Words: Coupled Vibration, Oscillator, Natural Frequency, Phase-Locking, Entrainment, Synchronization

A1. はじめに

複数の自励振動子が互いに影響を与え合う場合、それぞれの振動子のもつ周期が若干異なっている、周期が一致する同期現象が知られている。17世紀の半ばに細い糸に掛けられた二つの振り時計の周期が一致する現象としてホイヘンスにより始めて観察された。以後、多くの分野において同期現象は観察されている⁽¹⁾。

同期現象による問題としては、多数の歩行者の歩行と歩道橋の横揺れが同期し大きな振動を引き起こしたことがある。Fujinoらは実験的な検討を行い、歩行により橋に横揺れが生じ、その揺れにより多くの歩行が引き込まれて同期し、さらに大きな橋の振動を起すことを報告している⁽²⁾。松久らは身体のリズム生成機構である神経振動子と歩道橋の横振動の関係を引き込み現象として検討している⁽³⁾。

著者らは複数の振動子と支持系が連成振動することにより大きな振動が起ることを防止する目的で研究を行っている。本論文では、糸によって吊られた支持系に複数の振動子を搭載した場合の連成振動について検討を行った。全ての振動子がそろって振動し支持系が大きく振動する場合と振動子が互いの振動を打ち消し合い支持系の振動が非常に小さい場合がある。ここでは、大きな振動が起る場合、減衰を与えてその振動に与える影響を調べたので報告を行う。

A2 実験

図A1は実験装置の概略を示したものである。4本の糸で吊られた台の上に振動子が載せられている。糸は、横方向(x方向)にのみ台が振動するように張ってある。台の固有振動数 f_p は糸の長さ L による。台の減衰比 ζ_p は、図A1に示してあるダンパで調整している。台の固有振動数 f_p は15 Hz ~ 40 Hzの範囲で実験を行った。振動子の固有振動数は約267 Hzで、その個体差は1/1000 Hz程度である。その他のパラメータに関しても個体差は非常に小さく、各振動子はほぼ同一な特性である。

Fig. A1 Experimental apparatus

台の質量 M や減衰比 ζ_p を設定し、それから台の糸の長さ L により台の固有振動数を設定した。その後、初期条件として台を静止させた状態から、全ての振動子の初期角度を 42° に設定し振動を開始させた。振動を開始してから十分に時間が経過した後計測を行った。計測は非接触変位計とCCDカメラの画像を用いて行い、振動子と台の変位を計測した。なお今回の実験では5台の振動子($N=5$)を用いた。これらの実験により、構造物と自励振動子による振動特性を検討している。

A3. まとめ

吊橋状の構造物に載せられた自励振動子による振動特性について、実験および計算より検討を行った。それにより以下のことが明らかとなった。

構造物の上に配置された自励振動子が同位相で同期することにより構造物に大きな振動が生じるが、その同期現象は台の固有振動数 f_p に影響を受け、 f_p が自励振動子の振動数よりも高いとき、この同位相同期が起らない領域(大きな振動が発生しない領域)があることを明らかにしている。

1. はじめに

複数の自励振動子が互いに影響を与え合う場合、それぞれの振動子のもつ周期が若干異なっている、周期が一致する同期現象が知られている。17世紀の半ばに細いほりに掛けられた二つの振り時計の周期が一致する現象としてホイヘンスにより始めて観察された。以後、多くの分野において同期現象は観察されている⁽¹⁾。

同期現象による問題としては、多数の歩行者の歩行と歩道橋の横揺れが同期し大きな振動を引き起したことがある。Fujinoらは実験的な検討を行い、歩行により橋に横揺れが生じ、その揺れにより多くの歩行が引き込まれて同期し、さらに大きな橋の振動を起すことを報告している⁽²⁾。松久らは身体のリズム生成機構である神経振動子と歩道橋の横振動の関係を引き込み現象として検討している⁽³⁾。

著者らは複数の振動子と支持系が連成振動することにより大きな振動が起ることを防止する目的で研究を行っている。本論文では、糸によって吊られた支持系に複数の振動子を載せた場合の連成振動について検討を行った。全ての振動子がそろって振動し支持系が大きく振動する場合と振動子が互いの振動を打消し合い支持系の振動が非常に小さい場合がある。ここでは、大きな振動が起る場合、減衰を与えてその振動に与える影響を調べたので報告を行う。

2. 主な記号

f_n	: 振動子の固有振動数[Hz]
f_p	: 支持系の固有振動数[Hz]
m	: 振動子の質量[g]
x	: 台の水平方向変位
M	: 台の質量[g]
N	: 振動子の台数
γ	: 質量比 (振動子の質量/総質量 $m/(M+Nm)$)
η	: 振動子と台の重心から支点までの長さの比
θ_i	: 振動子の角変位
ω_i	: 振動子の固有角振動数[rad/s]
ω_p	: 台の固有角振動数[rad/s]
ζ_i	: 振動子の減衰比
ζ_p	: 台の減衰比
Ω_i	: 振動子と台の固有角振動数比(ω_i/ω_p)

3. 実験

3・1 実験装置 図1は実験装置の概略を示したものである。4本の糸で吊られた台の上に振動子が載せられている。糸は、横方向(x 方向)にのみ台が振動するよう、上方に広がるように張ってある。台の固有振動数 f_p は糸の長さ L による。台の減衰比 ζ_p は、図1に示してあるダンパで調整している。台の固有振動数 f_p を15Hz～40Hzの範囲で実験を行った。また台の質量 M を1,3,5kg, 減衰比 ζ_p を0.002,0.01,0.03として実験を行った。振動子は太陽電池によって駆動される小型の自励振動子を用いている。質量が約19gで支点から重心までの長さが16.9mmで、角速度が負で、角変位 θ が一定の範囲で駆動トルクが加わる。振動子の固有振動数は約267Hzで、その個体差は1/1000Hz程度である。その他のパラメータに関しても個体差は非常に小さく、各振動子はほぼ同一な特性である。

3・2 実験方法 台の質量 M や減衰比 ζ_p を設定し、それから台の糸の長さ L により台の固有振動数を設定した。その

後、初期条件として台を静止させた状態から、全ての振動子の初期角度を42°に設定し振動を開始させた。振動を開始させてから十分に時間が経過した後(10分程度)の約7分間計測を行った。計測は非接触変位計とCCDカメラの画像を用いて行い、振動子と台の変位を計測した。なお今回の実験では5台の振動子($N=5$)を用いた。

4. 解析

4・1 運動方程式 台の振動は小さく、鉛直方向の変位成分は十分小さいとして無視している。振動子は剛体として扱い、駆動力は一定角変位内で与えられるものとする運動方程式は以下のように表わすことができる。

台:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\zeta_p \frac{dx}{d\tau} + x = \gamma \eta \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{d\theta_i}{d\tau} \right)^2 (\sin \theta_i - x \cos \theta_i) - \frac{d^2\theta_i}{d\tau^2} (\cos \theta_i + x \sin \theta_i) \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

振動子:

$$\frac{d^2\theta_i}{d\tau^2} + 2\zeta_i \Omega_i \frac{d\theta_i}{d\tau} + \Omega_i^2 \sin \theta_i = -\Omega_i^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} \cos \theta_i - T_i \cos \theta_i, \quad (i=1 \sim N) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、式(2)の T_i は駆動トルクを意味し、角速度が負($d\theta_i/dt < 0$)で、角変位 $-4.4 \text{ deg} < \theta_i < 14.8 \text{ deg}$ の範囲で駆動トルクが加わるものとした。これらの運動方程式を数値積分して時刻歴応答を求めた。

5. 結果および考察

5・1 実験結果 台の質量を30kg($\gamma=0.0058$)に設定し、台の固有振動数 f_p を15Hz～40Hzの範囲の実験結果を示す。このとき、台の減衰比 ζ_p は約0.002である。図2は台の固有振動数 f_p を21Hzに設定した時の実験結果である。(a)は振動子の角変位および台の水平方向変位の波形、(b)は振動子間の位相差の時間変化を示している。図2(a)より、全ての振動子は同位相で振動しており、台の振幅が約1mmであることが分かる。(b)より十分長い時間、各振動子間の位相差はほぼ0degを保っている、つまり同位相同期をしていることが分かる。また、この時振動子と台の位相差は約180degになっていた。ここでは、このような同位相同期のタイプをType1と呼ぶことにする。

台の固有振動数 f_p をさらに高い28Hzに設定し、行った実験結果を図3に示す。前記の実験結果と同様に全ての振動子は同位相で同期しており、台と台の位相差はほぼ0degとなっている。このような同位相同期のタイプをType2と呼ぶことにする。実験を行った結果、全ての振動子が同位相で同期すると台が加振されて大振動を生じることを確認した。振幅は約1mmである。同位相同期には振動子と台の位相差が0,180degの2タイプあり、それらは台の固有振動数 f_p に影響

Fig. 1 Experimental apparatus

(a) Time waves

(b) Phase difference between θ_1 and θ_5 Fig. 2 Experimental result ($\gamma=0.0058, f_p=2.1\text{ Hz}$)

(a) Time waves

(b) Phase difference between θ_1 and θ_5 Fig. 3 Experimental result ($\gamma=0.0058, f_p=2.8\text{ Hz}$) (a) f_p and θ_i, x (b) f_p and f_s Fig. 4 Calculated result ($\gamma=0.0058, \zeta_p=0.002$)

を受けることも分かった。 f_p をさらに高くすると同位相同期が起らず、台の振幅は小さくなる。

5・2 計算結果 実験結果から全ての振動子が同位相で同期することで台が大振動を生じることが分かったので、前記の運動方程式(1)と(2)を用いて数値計算を行い、上記のような同位相同期の周期解を求めた。計算に用いた減衰比は前記の実験条件に近い値の 0.002 とした。図 4 は台の質量が 30 kg ($\gamma=0.0058$) における Type1 の同位相同期の周期解を示している。(a) は振動子と台の振幅を台の固有振動数 f_p に対して示した図であり、(b) は同期時の振動数 f_s を台の固有振動数 f_p に対して示した図である。実線で示されている部分はその解が安定解であることを意味している。計算は 0.1 Hz ~ 40 Hz の範囲で行った。なお、周期解が途中で無くなっている部分に関しては、実験に用いた自励振動子の特性によるものなので、場合によっては、 f_p がもっと高い領域に安定な周期解が存在する可能性がある。図 4(b) より、台の固有振動数 f_p を高くしていくと同期振動数が台の共振ライン($f_s=f_p$) に近づいていくことが分かる。それによって、図 4(a) を見ても分かるように振動子は振幅が小さくなり、台は振幅が大きくなること分かる。

図 5 は台の質量が 30 kg ($\gamma=0.0058$) における Type2 の同位相同期の周期解を示している。実線は安定解を、破線は不安定解をそれぞれ示している。図 5 より、台の固有振動数 f_p が高くなっていくにつれて同期振動数が台の共振ライン($f_s=f_p$) から離れていき、台の振幅は徐々に小さくなっていくことが分かるが、それでも比較的大きな振動となっている。また、 f_p が 28 Hz 付近で周期解が安定解から不安定解になっている。 f_p がさらに高い領域にも周期解が存在するがそれらの解も不安定解となっている。ここで、周期解が安定解から不安定解になるあたりである一つの振動子の振幅が大きくなっているが、これはその周期解における同期振動数が振動子の固有振動数に近い値となり振動子が共振状態になるためと考えられる。なお、図 5 も図 4 と同様に周期解が途中で無くなっている部分があるが、これは実験に用いた自励振動子の特性によるものである。

Fig. 5 Calculated result ($\gamma=0.0058$, $\zeta_p=0.002$)

図6は数値計算により求めた安定な同位同期解に対応する周期解の質量比 γ に対する存在領域を示している。以降、周期解は安定な周期解のみを指す。縦軸に質量比 γ を取り、横軸には台の固有振動数 f_p を取っている。計算では、質量比 γ は台の質量 M を変えることで調整している。つまり、図6の縦軸 γ は値が小さいほど台の質量 M が大きいということを意味している。実線は台の質量 M が0.5, 0.8, 1, 1.3, 3, 5, 10kgにおける同位同期周期解(Type1とType2)の存在領域を示している。点線は γ に対する同位同期周期解の存在領域の境界(Type1とType2)を示している。また、比較参考の為に図に同じ条件の結果を①で示してある。

この図から、台の固有振動数 f_p を高くすると同位同期の周期解が存在しない領域があり、その領域は γ を小さくしていくと拡大していくことが分かる。よってこのパラメータ領域に系を収めることで、同位同期による台の大振動を発生させないようにできると言える。

図7は数値計算により求めた安定な同位同期解に対応する周期解の減衰比 ζ_p に対する存在領域を示している。縦軸に減衰比 ζ_p 、横軸に台の固有振動数 f_p を取っている。減衰比を調整すると図7に示すような同位同期の周期解が存在しない領域があることが分かった。したがって、質量比 γ と台の固有振動数 f_p だけでなく、台の減衰比 ζ_p を調整することでも、同位同期による台の大振動を防止できることが分かる。

図8は振動子の台数 N に対する同位同期周期解の存在領域を示したものである。台数 N が増えていくにつれて周期解の存在領域が拡大していることが分かる。特に、Type2の周期解の存在領域 f_p が高い領域に顕著に広がっている。したがって、前記の安全なパラメータ領域は $N=5$ の場合のみであり、同期現象による台の振動を防ぐためには、パラメータ M に関しても検討しなければならない。

Fig. 6 Range of in-phase synchronization vs γ ($\zeta_p=0.002$)

Fig. 7 Range of in-phase synchronization vs ζ_p ($\gamma=0.0173$)

Fig. 8 Range of in-phase synchronization vs N
($\gamma=0.0173, \zeta_p=0.002$)

6. まとめ

吊橋状の構造物に載せられた自励振動子による振動特性について、実験および計算より検討を行った。それにより以下のことが明らかとなった。

構造物の上に配置された自励振動子が同位相で同期することにより構造物に大きな振動が生じるが、その同期現象は台の固有振動数 f_p に影響を受け、 f_p が自励振動子の振動数よりも高いとき、この同位相同期が起らない領域（大きな振動が発生しない領域）があることを明らかにしている。

文 献

- (1) Pikovsky, A., et al., *Synchronization*, (2001), pp.1-7, Cambridge University Press.
- (2) Fujino, Y., et al., Synchronization of Human Walking Observed During Lateral Vibration of a Congested Pedestrian Bridge, *Earthquake Engineering and Structural dynamics*, Vol.22(1993), pp.741-758.
- (3) Matsuhisa, k., et al., Synchronization of Walking Rhythm by Lateral Vibration of Footbridge(in Japanese), *Preprint of the Japan Society of Mechanical Engineers*, No.03-7(2003), 458.