208 モーダル差分構造の冗長性に関する考察

A study on the singularity in case of modal differential substructure method

○望月 隆史 (エステック) 正 萩原一郎 (東京工業大学)

Takafumi MOCHIZUKI, ESTECH Corp. 89-1 Yamashita-cho, Naka-ku, Yokohama-shi, Kanagawa
 Ichiro HAGIWARA, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo

Modal differential substructure that can quickly predict effects of structural modifications has been proposed by the author. This method utilizes simulation results of the model before the structural modification. Because the method does not require the user to decide the section of structural modification beforehand, the user can determine the section after checking the calculation result.

In a certain case, however, where the model has to handle very many modes, the eigenvalue problem becomes insoluble due to singularity of the mass matrix. This report elucidates the reason of the problem and shows a procedure to avoid it.

Key Words : FEM, Vibration, structural analysis, CAE, modification analysis

第一著者は変更前の解析結果から、変更部の構造の影響を取り除いて作成するモーダル差分構造と呼ぶ部分構造を提案している (図 A1) . この取り除く作業を物理自由度の数に比べて非常に小さな変更前の全系のモード座標上で実施し、未変更部分の特性を境界部に集約して表現する。これを新構造と組み合わせることで、効率的に構造変更後の特性を求めることができる手法である。

あらかじめ構造変更する部位を決めておく必要が無いため、計算結果を分析してから部分構造を作成することができ、変更部分に全く異なる構造を用いることが可能で、構造変更の自由度も高い。このような長所を持ち、製品開発の流れを変えることなく効率化が可能のため、実際の設計現場でも利用されてきている。

しかし、構造変更部分のみが振動し、他の部分が振動しない全系固有モードがあったとすると、このモードに対応するモーダル差分構造の分担質量は 0 となる。もともと固有モードの計算は、質量行列の逆行列が計算できる必要があるのに対し、このような場合には、系全体の

質量行列が特異となり固有モードが計算できないことがある。この問題は通常の利用で問題となることはほとんどないが、以下のような条件で起こりやすくなる。

- (1) 取り除く部分が大きい場合
- (2) 対象周波数が高い場合
- (3) 機構モードを含むような一体構造でない場合

質量行列が特異な場合に、質量行列を対角化して各モードの質量寄与を線形独立なものとするれば、その固有値が非常に小さなものに対して、構造変更部位のみが変形する図 A2 に示すようなマスレスモードが得られる。この変形は未変更部分の特性を表すには必要のないもの、逆に未変更部分では表現できないものであり、これを拘束することで、計算精度の悪化を伴わずに、特異性を排除できることがわかった。また、この固有値の大きさにより特異性の判断が可能で、マスレスモードの数を特定できることが確認できた。

このマスレスモードを排除する機能を組み合わせることでモーダル差分構造の計算安定性が向上し、より有効な手法とすることができた。

Fig. A1 Modal Differential Substructure

Fig.A2 Massless mode

1. モーダル差分構造

図1にモーダル差分構造の概要を示す。本手法では変更前の解析結果から、変更部の構造の影響を取り除き部分構造を作成する。この取り除く作業を全て変更前の全系のモード座標上で実施し、未変更部分の特性を物理自由度の数に比べて非常に小さな自由度で表現するモーダル差分構造が得られる。

未変更部分の特性は境界部に集約されて表現され、新構造と組み合わせることで、効率的に構造変更後の特性を求めることができる。

構造変更に残しておく物理自由度を添え字 a で表し、構造変更を行わない部分を添え字 o で表すと、運動方程式は式 (1) となる。

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ao} \\ M_{oa} & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_a \\ \ddot{u}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ao} \\ C_{oa} & C_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_a \\ \dot{u}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ao} \\ K_{oa} & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a \\ f_o \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで M, C, K はそれぞれ質量・減衰・剛性行列を、 f は外力、 u は変位である。従来の区分モード合成法⁽⁹⁾では、構造変更を行わない部分に部分構造の固有モードを用いるのに対し、本手法では緒言に述べた利点が利用できるよう全系の固有モード（自由度 ξ_s 、モードシェイプ Φ ）で座標変換を行い式 (2) が得られる。

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ao}\Phi_o \\ \Phi_o^T M_{oa} & M_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_a \\ \ddot{\xi}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ao}\Phi_o \\ \Phi_o^T C_{oa} & C_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_a \\ \dot{\xi}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ao}\Phi_o \\ \Phi_o^T K_{oa} & K_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ \xi_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a \\ f'_o \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$M_d = \Phi_o^T M_{oo} \Phi_o \quad (3)$$

$$= M_s - \Phi_a^T M_{aa} \Phi_a - \Phi_a^T M_{ao} \Phi_o - \Phi_o^T M_{oa} \Phi_a$$

$$M_s = \Phi^T M \Phi (= I) \quad (4)$$

$$f'_o = \Phi_o^T F_o \quad (5)$$

式 (2) における M_d, C_d, K_d が提案するモーダル差分構造の特性行列（質量・減衰・剛性）で、質量行列は式 (3) で表すことができる。この式中の M_s は全系のモード質量で、一般的には正規化され単位行列となる。なお、本報告では簡単のため、この全系のモード質量が単位行列の場合を扱う。行列右下の添え字は自由度別の分割を意味し、減衰・剛性に関してもモード減衰・剛性が単位行列とはならないことを除いては式 (3), (4) の質量項をそれぞれ置き換えたものである。なお f_o はモーダル差分構造に作用するモード外力である。モーダル差分構造は上記の定式化の添え字 d で表される未変更部分構造である。

Fig. 1 Modal Differential Substructure

2. 質量行列の特異性

式 (3) で表されるモーダル差分構造の質量行列 M_d は、何も取り除かない場合には単位行列、全てを取り除いた場合には0行列、部分構造を取り除いた場合にはこの間の特性となる。特にこの行列の対角項は i 番目のモードに対して式 (6) のように、自由度 k の合計値で表される。全系全ての質量合計がモード質量の1であるのに対し、モーダル差分構造に含まれる部分のみの合計となることから、元の全系モードに対してどれだけの質量寄与を受け持っているかを表している。

$$m_i = \sum \phi_{ik}^2 m_k \quad (6)$$

なお、モード剛性や、比例減衰系におけるモード減衰についても、同様の考え方ができ、その対角項の値を比較することで分担寄与がわかる。

取り除く部分のみが振動し、他の部分が振動しない全系固有モードがあったとすると、このモードに対応する

モーダル差分構造の分担質量は0となる。また実際の適用場面では、数値的な誤差のため非常に小さな負の値となることもある。極端な例を考えると、全く切り離された2つの構造物を全系とした場合に、一方を取り除いてモーダル差分構造を構築した場合には、取り除いた側が振動するモードは全て質量が0となる。

このような場合、モーダル差分構造の質量行列は正定ではなくなり特異となる。こうした特性を考慮し、質量行列が特異となり易い条件は以下のようにまとめることができる。

- (1) 取り除く部分が大きい場合
- (2) 対象周波数が高い場合
- (3) 機構モードを含むような一体構造でない場合

なお対象周波数が高く固有モードの数が多くなると、各部のローカル共振が現われるようになり、特異となり易くなることを(2)の補足として付け加えておく。

実際には、取り除く部分のみが振動するモードが個別に存在するケースはまれで、より一般的には、モードの重ね合わせにより、取り除く部分のみが振動できる変形がないかを考えておく必要がある。

モード解析はモードシェイプを変換行列とする座標変換と考えることができ、この面から現象を考えると、本手法で用いるモード座標は全系のモデルでは質量行列に対し直交性を有しているが、取り除いた分系に対して直交条件は成立しない。具体的な例で考えると、取り除く部分にローカルな共振があると、この部分の振動形態は異なるが、残った部分の変形形態は同一となる複数のモードが存在することがある。この場合、残った部分の変形パターンからではこれらモード自由度の識別がつかなくなり、線形従属関係が生まれてしまう。このような質量行列の冗長性は潜在的に質量が0となる自由度を含むということになる。

もともと固有モードの計算は、質量行列の逆行列が計算できる(正定である)必要があるが、このようなモーダル差分構造を利用すると、通常の有限要素の計算における質量0の独立自由度が存在する場合と同様に、系全体の質量行列が特異となり固有モードが計算できない場合がある。また値が0にならなくとも、質量が小さく条件数が非常に大きい場合には、数値誤差により固有値・固有モードの精度が悪化したり、固有値計算で反復計算を行う手法では計算時間が長くなるなどの問題が発生する。

3. 特異性の排除

モーダル差分構造の質量行列の対角項が小さなモードを取り除くことで冗長性を回避することは可能である。

ただし、冗長性を取り除くために必要なモード数はこの対角項の値だけでは判断が難しい。

そこでこの質量行列を対角化し、質量寄与を線形独立なものとするれば、その行列のランクから冗長性の度合いを求められる。合わせてそれぞれの質量寄与に対応する変形パターンを求め、これを拘束すれば冗長性を取り除くことができる。対角化には式(7)の固有モード計算と同じ実固有値解析が利用でき、汎用の有限要素解析ソフトウェアへの実装も比較的容易である⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

$$([M_d] - \lambda[I])\{\xi_s\} = \{0\} \quad (7)$$

$$\{\xi_s\} = [\Psi]\{\gamma\} \quad (8)$$

$$[\Psi]^T [M_d] [\Psi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

この固有値解析によって得られる固有ベクトル Ψ とこの形で変形する自由度 γ 、全系固有モード自由度の関係は式(8)となる。また、固有ベクトルによりモーダル差分構造の質量行列は対角化され、式(9)の関係式が成り立つ。

式(8)の関係からわかるように、ここで得られる固有ベクトルは全系固有モードの比率を表しており、この比率によるモードの重ね合わせから変形パターンが得られる。対角化された固有値 λ はこの変形パターンの質量寄与を表し、小さいものから順に求めることができる。また、これらのモードは直交性を有し互いに独立となるため、他のモードに影響を与えることなく取り除くことが可能である。なお、ここで得られる固有値・固有ベクトルを固有モードと区別するために質量直交モード、このうち取り除くべき質量寄与の小さいものをマスレスモードと呼ぶことにする。

この固有値で表される質量寄与を冗長性の判断として用いる。値は0から1の範囲となり、0とは質量寄与が全くないことを、1とはモーダル差分構造にその全ての特性が含まれることを意味する。このような正規化された指標を用いることで一貫した判断が可能となる。

具体的には数値誤差を元に決定したある閾値を用い、この値以下のものを取り除くことになる。この値が小さすぎる場合には冗長性を取り除くことができないため構造変更計算で問題となり、逆に大きすぎる場合には必要な特性まで取り除いてしまうため、特性を正しく再現できなくなる。式(4)を元に全系の質量行列を行列の

三重積によりモード質量を計算すると、数値誤差を含んだ単位行列となる。式 (10) に示すこの誤差の最大値がここで言う数値誤差で、閾値はこれよりも大きな値とする必要がある。

$$err = \|\Phi^T M \Phi - I\|_{\max} \quad (10)$$

なお、この誤差要因としてはモードシェイプに含まれる誤差の影響が最も大きく、固有値解析手法によっても値は異なる。特に大規模モデルを計算する場合には、自動あるいは手動により全系を部分構造に分け、部分構造合成法を利用することがある。この場合の全系の固有値は部分構造の打ち切り誤差を含む近似値であるため、この誤差は大きくなる。なお、本手法を実際に適用する場合には、冗長性の問題を回避できるなるべく小さな値として、自動領域分割を利用した部分構造合成法を含めた幾つかのモデルで検証し、 $1.0E-5$ とした。これは特定のモードにおいて 0.001% 以下の質量を無視したのとはほぼ等価な意味を持つ。

実際これを取り除く方法であるが、全ての質量直交モードを独立自由度としてモーダル差分構造の特性を表現し直し、必要な自由度のみ用いる方法も考えられる。しかし今回は、式 (8) のマスレスモード i の自由度のみ抜き出し $\gamma_i = 0$ となる拘束条件式を追加する形で行った。

$$\sum_{j=1}^n \psi_{ij} \xi_j = 0 \quad (11)$$

この方法では、前者に対し影響は微小であるが、従属自由度の削減計算等、構造変更解析における計算時間の増加という短所が挙げられる。しかし、元のモードとの関連性をもったまま定式化できること、及び式 (7) の質量直交モードを全数求める必要がないという長所を持つ。

4. モデルによる検証

検証用に各パネル振動が連成しにくいよう、輪郭を梁要素で補剛した図 2 に示すシェル要素のモデルを用いた。

ループに当たる部分の構造変更を考え、これ以外の部分をモーダル差分構造とした。

Fig.2 Verification model

まず、解析対象周波数による固有モード数の変化に対する質量寄与の変化を、表 1 に示す 3 条件について検討した。図 3 に Case 3 でマスレスモードとなった質量寄与の低い方から 3 つのモードを示すが、固有モード数の増加に伴い質量寄与が指数的に減少し、マスレスモードが現われることがわかる。この検証モデルからわかるように、質量行列の冗長性の問題は通常の利用では問題になることはまれで、固有モードを極端に多く求めるような場合に限られる。

Fig.3 Mass contribution and number of modes

Table 1 model variation

	Eigen modes				Mass orthogonal mode	
	frequency limit [Hz]	No. of modes	minimum diagonal mass	ID	minimum mass contribution	No. of massless modes
Case 1	60	34	1.19E-01	9	2.42E-03	0
Case 2	120	83	1.19E-01	9	4.56E-05	0
Case 3	240	199	1.07E-01	130	4.86E-07	3

次に Case 3 における全ての質量直交モードの質量寄与を図 4 に示す。おおそモーダル差分構造の全体構造に対する質量比率に相当する約 85% の質量直交モードで、質量寄与が 1 となっている。最初の 15% に質量寄与の小さいモードが現われ、値の変化は指数的であることがわかる。このことから、マスレスモードは構造変更部分を大きくすると出やすく、判別は比較的容易であることがわかる。

Fig.4 Mass Contribution

図 5 に、Case 1 及び Case 3 の質量直交モード 1 の変形形態を示す。これは式 (12) により、固有モードの重ね合わせにより物理自由度の変形形態 u_{ML} を求めた結果で、変形の大きさによるコンター図とした。

$$\{u_{ML}\} = [\Phi]\{\varphi_i\} \quad (12)$$

Case 1: mass contribution
= 2.42E-3

Case 3: mass contribution
= 1.31E-6

Fig.5 Mass orthogonal mode 1

このモードの基本的な変形形態は同じで、表 1 に示す Case 1, Case 2 で最も質量行列の対角項が小さかった固有モード 9 のループ部膜一次モードに似た形状となった。また固有モード数が増えることで、ループのみが変形するモードへと変化しているのが判る。なお、Case 3 の質量寄与が最小となるマスレスモード (図 6 モード 2) は膜 2 次に似たモードであり、モード数の増加によりモード順位が入れ替わっている。一方、質量行列の対角項が最小となる固有モード 130 の変形形態はこれと全く異なるループ部分に腹が 8 つある高次のモードであり、必ずしもマスレスモードの変形形態とは一致しないことがわかった。

また、参考に質量寄与がほぼ 1 となる質量直交モードを図 7 に示すが、取り除いたループ部分はほとんど変形しないモードが得られている。

mode 2

mode 3

Fig.6 Other massless modes

Fig.7 Mass orthogonal mode (mass contribution=1)

この検証により、モーダル差分構造の質量行列の対角項に着目してマスレスモードの半断を行うのは難しいが、これを対角化することで、マスレスモードの特定が容易となることが確認できた。

次に、図5の質量寄与の小さな質量直交モード1を拘束したモーダル差分構造とループ有限要素モデルの組み合わせで求めたのループの応答を図8に示す。凡例は質量寄与の値を示し、表1のCase1~3に対応する。太い実線が全て有限要素モデルで計算した場合で、モーダル差分構造を利用した計算がこの線に重なれば元の特性を正しく再現できていることになる。マスレスモードと見なせるような質量寄与が非常に小さなモードでは、これを拘束しても応答を正確に再現するのに対し、この値が十分には小さくない場合には、再現精度が悪いことがわかる。

特に18Hz付近にはループ部の膜1次モード(モード19)があり、剛体的な動きやフロア部分の変形が含まれるといった部分が異なるものの、拘束した質量直交モードと良く似ているために、再現性が最も悪い。

ただし、拘束したモードはマスレスモードにはならなくとも、その質量寄与は $2.4\text{E-}3$ と大きな値ではなく、物理モデルでこれに対応するモードが表すことができるため、このモード自体が無くなることはない。逆に、質量寄与の高いモードを拘束すると、そのモードはなくなってしまふ。図8の場合には、ループと結合する境界の動き易さが減少し、剛性が高くなって周波数が高くなっていると考えられる。

Fig.8 Frequency Response Function

6. 結 論

モーダル差分構造を利用した計算を行う場合、質量行列の特異性により計算が不安定になる場合があることを示した。これは以下のような場合に起こり易くなる。

- (1) 取り除く部分が大きい場合
- (2) 対象周波数が高い場合
- (3) 機構モードを含むような一体構造でない場合

質量行列を対角化することで、特異性を引き起こすマスレスモードを特定できることを示した。また、これを拘束することで、計算精度の悪化を伴わずに、特異性を排除できることを確認した。

以上、マスレスモードを排除する機能を組み合わせることでモーダル差分構造の計算安定性が向上し、より有効な手法とすることができた。

文 献

- (1) Mochizuki, T and Ogawa, *Efficient Approach for Structural Modification Analysis*, Review of Automotive Engineering Vol.27, No1 (2006), JSAE, pp75-82.
- (2) Mochizuki, T and Ogawa, *Efficient Approach for Structural Modification Analysis* (in Japanese), Journal of JSAE Vol.36, No.5 September (2005), JSAE, pp175-180.
- (3) Craig, R. R., Jr. and Bampton, M. C. C., *Coupling of Substructures for Dynamic Analysis*, AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, 1968, pp. 1313-1319.
- (4) Nagamatsu, A. and Ohkuma, M., *Substructure Synthesis Method* (in Japanese), 1991, p. 354.
- (5) Reymond, M., *DMAP Programmer's Guide*, Santa Ana, MSC Software corporation, 2004, p. 1756.
- (6) MSC Software Corporation, *MSC Nastran 2004 Reference Manual*, Santa Ana, MSC Software Corporation, 2004, p. 1009.