362 誘電エラストマを用いた積層構造を持つはりの挙動解析

Behavior Analysis of a Laminated Beam Including Dielectric Elastomer

○ 藤原 誠司 (慶大院) 正 杉浦 壽彦 (慶大) 田口 大介 (慶大)

Seiji FUJIWARA, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama

Toshihiko SUGIURA, Keio University, Daisuke TAGUCHI, Keio University

This research deals with dynamics of dielectric elastomer under a high electric field applied to the elastomer. Taking advantage of this phenomenon, a flexible actuator like artificial muscles is expectable. A bending actuator of cantilever type was considered and the governing equation was derived. From this governing equation, eigenmodes and eigenfrequencies were obtained by using static equilibrium solutions, both with and without D.C. voltage. Under the condition of A.C. voltage applied, a frequency-response curve was obtained by using the method of harmonic balance.

Key Words : Forced Vibration, Dielectric Elastomer, Electrostatic Attraction, Electrostriction.

近年、人工筋肉のような柔軟な挙動を示す高分子アクチュエータの実現を目指して多くの研究が行われており、それに適する様々な材料が注目されている。代表的な材料としては電場応答性高分子が挙げられる。その中でも特に誘電エラストマは、伸縮率が大きく、耐久性も非常に高く、空中での動作が可能という点で、電解液中で使用しなければならない他の電場応答性高分子よりも優れている。

片持ちはり式のアクチュエータにとってその性能を特徴付けるのは、先端の振れ幅、曲げ力、曲げ振動の固有振動数である。これまでにも、誘電エラストマに高電場を印加させた場合の静的作動応答に関する研究や、高分子の化学的な反応による性能向上の研究がなされている(1),(2)。しかしながら、片持ちはり式の曲げアクチュエータとして、その動的挙動が解析的に研究された例は少ない。

本研究では、誘電エラストマを用いた曲げアクチュエータの基礎的研究を目的とし、解析モデルは Fig. A1 に示すように3層構造の片持ちはりとする。誘電エラストマに金を電極板として蒸着させて、金に電圧を印加し、蒸着させた金の層の厚さの違いによって、はりが屈曲するメカニズムとなっている。この誘電エラストマ特有の電歪的な効果を考慮に入れた以下のような支配方程式を導出した。

$$\ddot{v} + v'''' - \kappa v'' = 0 \quad (\text{A1})$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & v=v'=0 \\ s=1: & v''=\mu, v'''=0 \end{cases} \quad (\text{A2})$$

得られた方程式から、慣性項を無視し、直流電圧を印加した場合の静的平衡解を導出した。静的平衡解から電圧を印加することによって、Fig. A2 のように片持ちはりが屈曲する様子が確認できた。また、直流電圧を印加した場合と印加しない場合で、静的平衡解を用いて固有モードと固有振動数を求めた。さらに交流電圧を印加した場合の支配方程式、

$$\ddot{v} + v'''' - \kappa \sin^2 \nu t v'' = 0 \quad (\text{A3})$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & v=v'=0 \\ s=1: & v''=\mu \sin^2 \nu t, v'''=0 \end{cases} \quad (\text{A4})$$

より、加振振動数 ν を変化させることによって生じる共振現象も確認した (Fig. A3)。

Fig. A1 Analytical model of a laminated beam consisting of a dielectric elastomer with gold coatings

Fig. A2 Shape of the cantilevered beam under D.C. voltage

Fig. A3 Linear solution for frequency response of the beam deflection under A.C. voltage of amplitude 1000V

1. はじめに

近年、人工筋肉のような柔軟な挙動を示すソフトアクチュエータの実現を目指して多くの研究が行われており、それに適する様々な材料が注目されている。現在使用されている他のアクチュエータに比べ、これらのアクチュエータの特長には、加工性に優れ、軽量で小型化が容易であり、センサや構造材料と一体化して任意の形状に成型可能という点がある。また応答性にも優れ、柔軟に動くことが可能なため、ヒューマノイドロボットや医療・福祉などの人間協調の動きを必要とするアクチュエータとして開発が期待されている。

代表的な材料としては伸縮性・密度あたりの作動圧の面から、電場応答性高分子が挙げられる。中でも特に圧電アクチュエータとして用いられる誘電エラストマは、伸縮率が大きく、耐久性も非常に高く、空中での動作が可能という点で、電解液中で使用しなければならない他の電場応答性高分子よりも優れている。しかしながら、高電圧印加の必要性や、水中での作動が難しいといった問題が残されている。

誘電エラストマを電極板で挟んだものがアクチュエータの構造である。これに高電圧を印加すると各電極板には電荷が蓄えられる。この静電引力とエラストマの弾性力のバランスによって、エラストマが伸縮するメカニズムである。

片持ちはり式のアクチュエータにとってその性能を特徴付けるのは、先端の振れ幅、曲げ力、曲げ振動の固有振動数である。これらの性質はアクチュエータの大きさや、強電場下において強い非線形性を示すエラストマの電歪効果や弾性に依存する。これまでにも、誘電エラストマに高電場を印加させた場合の静的作動応答に関する研究報告や、高分子の化学的な反応による性能向上の研究報告がなされている(1),(2)。しかしながら、片持ちはり式の曲げアクチュエータとして、その動的挙動が解析的に研究された例は少ない。

本研究では誘電エラストマを用いた曲げアクチュエータの基礎的研究を目的とする。まず誘電エラストマ特有の電歪的な効果を考慮に入れた、3層構造の片持ちはり式の曲げアクチュエータの運動方程式を求める。そして得られた方程式から、直流電圧を印加した場合と印加しない場合での固有モードと固有振動数を求め、さらに交流電圧を印加した場合の挙動解析を行う。

2. 解析モデルと支配方程式

一般に積層アクチュエータとは、外部から電場が印加されることによって各々の層が収縮し、その収縮量が異なることと、各々が隣の層から拘束されていることにより屈曲する。

Fig.1 に片持ちの積層型アクチュエータに電圧を印加した場合の微小要素の解析モデルを示す(3)。両表面間の中央を通る軸を中心軸(s 軸)とし、微小要素において、中心軸の接線方向の軸を t 軸、法線方向の軸を n 軸とする。 k 番目の層は、中心軸からのずれを η とすると $\eta = \eta_k$ と $\eta = \eta_{k+1}$ の間に位置するものとする。また、 n 軸方向のみに電場 E_n が印加されているものとする。

ここで積層板の長さは幅に比べて十分長いものとする。ことにより、Euler-Bernoulli のはり理論を用いた積層はりの問題として捉える。微小要素の x 方向の変位を u 、 y 方向の変位を v とし、 u, v は s の関数となる。

支配方程式の導出を行う。まず電極板の金に電圧を印加させることによって生じる軸力とモーメントを求める。 n 軸

Fig.1 Analytical model of a laminated beam consisting of a dielectric elastomer with gold coatings

方向のみに電場 E_n が働いている場合の静電引力による n 軸方向の応力からポアソン比 ν_p を用いて t 軸方向の応力 σ_E を求め、その応力から誘電エラストマの層に生じる軸力 P を求める。ただし、 ϵ_0 、 ϵ 、 t_a 、 l 、 b は、それぞれ真空の誘電率、比誘電率、誘電エラストマの層の厚さ、はりの全長、幅である。誘電エラストマの層に生じる軸力は s によらず一定であるとすれば、軸力は以下のように表すことができる。

$$P = \int_A \sigma_E dA = \sigma_E b t_a \quad (\sigma_E \equiv \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E_n^2) \quad (1)$$

また電圧印加によって生じるモーメント M_E はヘビサイド関数 $h(s)$ を用いて以下のようになり(5)、蒸着させた金の厚さ t_b 、 t_c の差によって、モーメントが生じることが分かる。

$$M_E = \frac{1}{2} \sigma_E t_a (t_b - t_c) b \quad (2)$$

$$M_{Eh} = M_E [h(s) - h(s-l)] \quad (3)$$

変形後の微小要素の回転の運動方程式から回転の慣性を無視することによって、せん断力 Q とモーメントの関係式が得られ、以下ようになる。

$$Q + \sum_{k=1}^3 E_k I_k \phi'' + M_{Eh} = 0 \quad (4)$$

変形後の微小要素にかかる内力は張力 T 、せん断力 Q 、モーメント M であり、 t 軸方向と n 軸方向の並進の運動方程式は x 軸と中心軸のなす角 ϕ を用いると、以下ようになる。

$$\sum_{k=1}^3 m_k (\ddot{u} \cos \phi + \ddot{v} \sin \phi) = T' - Q\phi' \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^3 m_k (-\ddot{u} \sin \phi + \ddot{v} \cos \phi) = T\phi' + Q' \quad (6)$$

t 軸方向の方程式(5)より張力の差分 T' を s について積分すると、

$$T(s) = T(l) - \int_l^s [\sum_{k=1}^3 m_k (\ddot{u} \cos \phi + \ddot{v} \sin \phi) + Q\phi'] ds \quad (7)$$

となり $T(s)$ が得られる。ここで、 $T(l)$ について考えると、軸力は s によらず一定であることを考慮すると $T(l) = P$ となる。 $T(s)$ を n 軸方向の方程式に代入し、幾何的關係を用

いて u , ϕ を v に書き換え、線形項のみを考慮すると支配方程式は以下になる。

$$\sum_{k=1}^3 m_k \ddot{v} = - \sum_{k=1}^3 E_k I_k v'''' - M''_{Eh} + P v'' \quad (8)$$

次に支配方程式 (8) を無次元化する。代表長さとしてはりの全長 l を、代表時間としてはりの固有周期 $T = \sqrt{\sum_{k=1}^3 m_k l^4 / E_k I_k}$ を用いて無次元化を行い、無次元支配方程式と境界条件は以下になる。ただし、無次元を表す * は省略した。

$$\ddot{v} + v'''' - \kappa v'' = \mu [h(s) - h(s-1)]'' \quad (9)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & v=v'=0 \\ s=1: & v''=v'''=0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\kappa \equiv \frac{Pl^2}{\sum_{k=1}^3 E_k I_k}, \mu \equiv \frac{M_E l}{\sum_{k=1}^3 E_k I_k} \quad (11)$$

ここで、 κ , μ は無次元パラメータで、それぞれ軸力とモーメントを表すものである。

3. 固有モード

本研究での3層積層構造のはりに作用するモーメントは s によらず一定値を取る。そのことを考慮することで、式 (9), (10) は以下になる。

$$\ddot{v} + v'''' - \kappa v'' = 0 \quad (12)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & v=v'=0 \\ s=1: & v''=\mu, v'''=0 \end{cases} \quad (13)$$

まず電圧を印加しない場合の固有モードを求める。支配方程式と境界条件は以下になる。

$$\ddot{v} + v'''' = 0 \quad (14)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & v=v'=0 \\ s=1: & v''=v'''=0 \end{cases} \quad (15)$$

ここで上式の同次解 $v_h(s, t)$ を時間の関数 $T(t)$ と空間の関数 $\Phi(s)$ を用いて $v_h(s, t) = T(t)\Phi(s)$ とおき、上式に代入した際の $\Phi(s)$ に関する式は、固有値 λ を用いて以下のように表される。

$$\Phi'''' - \lambda^4 \Phi = 0 \quad (16)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & \Phi=\Phi'=0 \\ s=1: & \Phi''=\Phi'''=0 \end{cases} \quad (17)$$

式 (16) から求められる一般解から、式 (17) の境界条件を用いて得られた式に対してニュートン法を用いることにより、固有値 λ の数値的近似解を得ることができる。得られた近似解から固有振動数 $\omega = \lambda^2$ と固有関数 $\Phi(s)$ が決定される。Fig.2 に固有関数の形状と固有振動数を示す。

次に電圧を印加した場合の固有モードを求める。支配方程式と境界条件は式 (12), (13) である。式 (13) の境界条件からでは固有値 λ を決定できない (6)。固有値を決定するために、まず電圧印加時の静的平衡解を求める。電圧を印加し、静的平衡状態になった場合の変位を v_{st} とすると、式 (12), (13) は以下のように、時間変動項の慣性項を 0 とした方程式が導かれる。

$$v_{st}'''' - \kappa v_{st}'' = 0 \quad (18)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & v_{st}=v'_{st}=0 \\ s=1: & v''_{st}=\mu, v'''_{st}=0 \end{cases} \quad (19)$$

式 (18), (19) から静的平衡解を求めることができる。静的平衡解を表す式を以下に示す。

$$v_{st} = \frac{\mu}{2\kappa} \left[-(e^{\sqrt{\kappa}} + e^{-\sqrt{\kappa}}) + \sqrt{\kappa}(e^{\sqrt{\kappa}} - e^{-\sqrt{\kappa}})s + e^{\sqrt{\kappa}(s-1)} + e^{-\sqrt{\kappa}(s-1)} \right] \quad (20)$$

式 (20) を用いて、印加電圧 2100~2400V におけるはりの形状を Fig.3 に示す。電圧を印加することによりはりの変位が大きくなっていることが分かる。さらに形状に関して、はりが直線的になっているのは、式 (20) の $\sqrt{\kappa}(e^{\sqrt{\kappa}} - e^{-\sqrt{\kappa}})s$ の項の軸力 κ の影響が強く現れているからである。

電圧印加時の固有モードを求めるために変位 v を、式 (20) で得られた静的平衡状態の変位 v_{st} と静的平衡状態からのずれ v_d を用いて、 $v = v_{st} + v_d$ と表す。これを式 (12), (13) に代入し、式 (18), (19) を用いることで v_d に関する支配方程式が得られる。

$$\ddot{v}_d + v_d'''' - \kappa v_d'' = 0 \quad (21)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & v_d=v'_d=0 \\ s=1: & v''_d=v'''_d=0 \end{cases} \quad (22)$$

ここで $v_d(s, t)$ を $v_d(s, t) = T(t)\Phi_d(s)$ とおき、上式に代入した際の $\Phi_d(s)$ に関する式は、固有値 λ_d を用いて以下のように表される。

$$\Phi_d'''' - \kappa \Phi_d'' - \lambda_d^4 \Phi_d = 0 \quad (23)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & \Phi_d=\Phi'_d=0 \\ s=1: & \Phi_d''=\Phi_d'''=0 \end{cases} \quad (24)$$

式 (23), (24) からニュートン法を用いて、固有値 λ_d の数値的近似解を得る。よって固有振動数 $\omega = \lambda_d^2$ と固有関数 $\Phi_d(s)$ が決定される。Fig.4 に固有関数の形状と固有振動数を示す。Fig.4 より、電圧印加時における固有関数の形状は、電圧を印加しない場合のはりではなく、静的平衡状態のはりの形状を基準とした固有関数の形状になっていることが分かる。

Fig.2 Eigenmodes and eigenfrequencies

Fig.3 Shape of the cantilevered beam under D.C. voltage

Fig.4 Eigenmodes and eigenfrequencies under the condition of D.C. voltage 2100V

4. 動的解析

交流電圧印加時における強制振動解を求める。軸力 κ とモーメント μ は電圧の二乗に比例しているため、交流電圧を印加することにより支配方程式と境界条件は以下のようになる。

$$\ddot{v} + v'''' - \kappa \sin^2 \nu t v'' = 0 \quad (25)$$

$$B.C. \begin{cases} s=0: & v=v'=0 \\ s=1: & v''=\mu \sin^2 \nu t, v'''=0 \end{cases} \quad (26)$$

これらの方程式に、調和バランス法⁽⁷⁾を用いて強制振動解を求める。支配方程式より、加振振動数 ν で加振した場合、支配方程式上では $\sin^2 \nu t$ となって加振の二倍の振動数成分が主なものとなる。ここで、式(25)をオイラーの公式を用いて置換すると以下ようになる。

$$\ddot{v} + v'''' - \frac{\kappa}{2} v'' = \frac{\kappa}{2} v'' \frac{i}{2} (e^{i2\nu t} - e^{-i2\nu t}) \quad (27)$$

さらに二倍の振動数成分が支配的であるので、定常解を以下のように仮定する。

$$v_p = \Phi_p(s) e^{i2\nu t} + c.c. \quad (28)$$

これを式(25)、(26)に代入し、係数を比較することで以下のような式が得られる。

$$-4\nu^2 \Phi_p + \Phi_p'''' - \frac{\kappa}{2} \Phi_p'' = 0 \quad (29)$$

式(29)と境界条件の式(26)より、共振曲線を求めることができる。共振曲線を Fig.5 に示す。固有振動数付近で共振現象が発生することが確認できる。

Fig.5 Linear solution for frequency response of the beam deflection under A.C. voltage of amplitude 1000V

5. おわりに

本研究では、金を用いた電極板に挟まれたポリウレタンフィルムを圧電曲げアクチュエータとして用い、高電圧を印加した際の挙動に関する解析を行った。現段階での結論を以下に示す。

- 支配方程式を導出し、電圧印加による電極板間の静電引力によって生じた軸力によるエラストマの効果と、積層構造によって片持ちはりが屈曲することを確認した。
- 電圧を印加した場合としない場合での固有関数の形状と固有振動数を、静的平衡解を用いることで確認した。
- 調和バランス法を用いることによって共振曲線を求め、交流電圧印加時の共振特性を確認した。

文 献

- (1) M.Watanabe, H.Hirai, T.Ueda, M.Suzuki and Y.Amaike, Polyurethane Actuators Using Bending Piezoelectricity and Bending Electrostriction, *Journal of Intelligent Material System and Structures*, Vol.10, (1999), 100-104
- (2) K.Tokugi, Y.Nakama, T.Ued and J.Kyokane, Piezoelectric Effect and Actuator Mechanism of Fullerenol Doped Polyurethane Elastomer (PUE), 電気材料技術雑誌, Vol.10, No.2, 2001.
- (3) Nayfeh, Pai, Linear and Nonlinear Structural Mechanics, Wiley Inter-Science, Hoboken, New Jersey, (2004), 183-226.
- (4) L.Q.Yao, J.G.Zhang, L.Lu, and M.O.Lai, Nonlinear Dynamic Characteristics of Piezoelectric Bending Actuators Under Strong Applied Electric Field, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol.13, No.4-August, (2004), 645-652.
- (5) H.Yabuno, S.Saigusa and N.Aoshima, Stabilization of the Parametric Resonance of a Cantilever Beam by Bifurcation Control with a Piezoelectric Actuator, *Nonlinear Dynamics*, Vol.26, (2001), 143-161.
- (6) Stanley J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, John Wiley Sons, New York, (1982).
- (7) A.H. Nayfeh and D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley Sons, New York, (1995).