314 数式処理ソフトを活用したコンピュータ教育

Computer education that uses Mathematica

○正 松本 宏行 (ものづくり大)

正 大石 久己 (工学院大)

Hiroyuki MATSUMOTO, Inst. of Technologists

Hisami OHISHI, Kogakuin Univ.

In this report, I take up the example that used Mathematica as the education example that I applied software in. I lecture for nearly 12 years, and the author is in charge of a class of the formula manipulation that I used Mathematica for by "applied programming practice" opened a course in next for three years. I perform what an author noticed in the class example that used formula manipulation software, examination to the future engineering education.

Keywords: nonlinear, Mathematica, vibration, programming

A1. はじめに

本報告においては、ソフトウェアを活用した教育事例として Mathematica を利用した事例を取り上げる。

著者は、工学院大学機械系学科において、3 年次に開講されている「応用プログラミング演習」にて Mathematica を用いた数式処理の授業を 12 年近く講義担当（非常勤）をしている。ものづくり大学においても 2 年ほど「数値解析応用および演習」において Mathematica を利用した解析について授業演習を実施している。数式処理ソフトを利用した授業事例の中で著者が気づいたこと、今後の工学教育への検討を行う。

A2. 数式処理について

Mathematica は、数式処理はもちろんのこと、数値計算、2D および 3D グラフィックス、アニメーション、サウンド処理、プログラミング、ファイル入出力など幅広い機能を兼ね備えている。もともと、C や VB などに代表されるプログラミング教育の担当した経験、そして、数値計算などの演習授業などの経験から文法にこだわりすぎて、限られた授業時間が足りなくなって、応用問題が解けなかったり、反対に、簡単な計算のみにとどまり、実際の工学問題へのつながりがわかりにくくなったりと学生への興味を失わずに行うことの必要性を実感させられていた。

著者の一人が機械力学研究室に所属した際に著指導教授である山川新二 名誉教授（工学院大学）から非線形振動の解析手法の道具として Reduce を紹介いただき、その便利さから数式処理に興味を持った次第である。

A3. 演習授業について

数式処理ソフト Mathematica を用いて、工学問題を繰り返し解きながら、グラフ化することの重要性および解析結果の吟味、近似を行うことの意味、制限などを深く洞察できるように心がけている。総じてエンジニアリングセンスを磨く一助になればと考えて授業構成を組んでいる。図 A1 はかんたんなグラフ化、図 A2 は偏微分方程式をイメージで把握することの重要性、また、図 A3 は数式処理の特長

をいかしてラグランジュ法による運動方程式の導出、そして数値積分を用いた結果を示している。

```

In[ ]:= 31
Out[ ]:= 6
Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}];

```

Fig.A1 Sin wave

Fig.A2 PDE

Fig.A3 2DOF system

A5. おわりに

数式処理ソフトを活用して気づいた点、工夫すべき点、今後の展望などを当日紹介する。

1. はじめに

本報告においては、ソフトウェアを活用した教育事例として Mathematica を利用した事例を取り上げる。

著者は、工学院大学機械系学科において、3 年次に開講されている「応用プログラミング演習」にて Mathematica を用いた数式処理の授業を 12 年近く講義担当（非常勤）をしている。そして、本務先である、ものづくり大学においても 2 年ほど「数値解析応用および演習」において Mathematica を利用した解析について授業演習を実施している。数式処理ソフトを利用した授業事例の中で著者が気づいたこと、今後の工学教育への検討を行う。

2. Mathematica (マセマティカ) について

Mathematica は、数式処理はもちろんのこと、数値計算、2D および 3D グラフィックス、アニメーション、サウンド処理、プログラミング、ファイル入出力など幅広い機能を兼ね備えている。

もともと、C に代表されるプログラミング教育の担当した経験、そして、数値計算などの演習授業などの経験から文法にこだわりすぎて、限られた授業時間が足りなくなつて、応用問題が解けなかったり、反対に、簡単な計算のみにとどまり、実際の工学問題へのつながりがわかりにくくなつたりと学生への興味を失わずに行うことの必要性を実感させられていた。

偶然に、著者の一人が指導教官である山川新二教授（工学院大学）から非線形の解析手法の道具として Reduce を紹介いただき、その便利さから数式処理に興味を持った。さらに、Mathematica の場合にはノートブック形式でデータを取り扱えること、そしてグラフィックス機能が優れていることから、授業で活用できないかと思案して偶然にも工学院大学にて授業を担当する機会を得て現在にいたっている。

毎年、後期（半年間）90 分 1 コマ授業において、Mathematica の演習授業を行っている。

- ・関数電卓のように計算に役立てる
- ・文字式の処理
- ・行列およびベクトル（リストを活用）
- ・微分方程式を解く
- ・グラフィックス（2D および 3D）
- ・プログラミング
- ・アニメーション
- ・関数作成
- ・ファイル入出力
- ・画像処理

などを順番に解説し、学生に演習を行う。

今までの経験からすると、プログラミング言語（C、VB など）のように文法をうるさく説明しなくてもまずは、インタラクティブに入力および出力結果を出してくれるところが学生の反応が良い。

さらに、飽きないようにグラフィックスを早めに体験させたりして興味を引かせたり、WAVE データを実行することでサウンド処理を楽しんでもらったりしている。その反面、組み込み関数の扱い、カッコの取り扱い、組み込み関数の先頭文字が大文字であること、関数名が長いことなど慣れないうちはとりつきにくい印象も受けるようである。

`In[1]:= 3!`

`Out[1]:= 6`

`In[4]:= Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}];`

Fig. 1 Sine wave

図 1 は 3 の階乗計算を 3! と入力して結果を求めたり、三角関数 Sin をプロットしたケースをしめしている。

いくつかのプログラミング言語ではグラフィックスを行うにはいくつかの事前定義が必要であったり、文法後回しにしたりと初学者にとっては、少々難しい印象をうけることがあるようである。

Mathematica の場合には、1 行でも上図のようなグラフィックスが可能であることが初学者でも意欲を持って取り組んでもらう契機になるのではないと思われる。

現在、授業では Mathematica 5.2 を利用しているが

図 2 のような数式入力を補助する「パレット」

Fig. 2 palette

が便利である。べき乗、分数、平方根、積分、行列など数式エディタを利用して数式作成をする感覚で数式処理ができることに授業において重宝している。

3. 授業について

授業でのねらいとしては、単に Mathematica を使えることが目的ではない。以下の項目を重視して授業構成を組んでいる。

- ・工学問題を解ける力を身につけること
- ・問題を解いた結果を考察、吟味できること
- ・将来、研究室に所属して研究に着手したときにも役立てられるようにしておくこと

総じて、エンジニアリングスキルを磨く契機になるよう配慮して授業計画を組んでいる。

特に、従来では、プログラミングの文法にこだわるあまり時間が足りなくなることもない。

具体的なケースとしては次の5項目を中心にしている。

- (1) ニュートンラフソン法
- (2) 微分方程式をイメージで理解すること
- (3) 最適問題の枠組みを理解して自身で解くこと
- (4) 乱数を利用した解析手法（モンテカルロ法）
- (5) ラグランジュ法による運動方程式の導出

などを後半の演習授業で実施して各自問題を解かせてレポート（ノートブック）として提出させている。

図3はノートブックの一例である。

偏微分方程式の数値解

```
phi[x_] := If[-4 < x < 4, e^-x^2, 0];
```

熱伝導方程式（拡散方程式）を解く

```
kai = NDSolve[{D[u[x, t], t] - D[x, x] u[x, t] == 0,
  u[x, 0] == 100 * phi[x], u[-5, t] == 0, u[5, t] == 0,
  u, {x, -5, 5}, {t, 0, 5}]
```

```
{{u -> InterpolatingFunction[
  {{-5., 5.}, {0., 5.}}, <>]}}
```

Fig. 3 Notebook

Mathematica の場合、微分方程式を解く組み込み関数として NDSolve がある。さらに、補間関数（Interpolating Function）を用いて数値的に得られた解が式として取り扱うことが大きな利点である。初学者にとっては、わかりにくい概念であるようであるがグラフ機能を活用して、微分方程式（常微分、偏微分）を解く演習を行っている。力学の問題においても運動方程式を解くという場面においても初期条件の重要性、解曲線のグラフ化などイメージで理解してもらうための道具として有効であると考えられる。

Fig. 4 PDE

運動方程式から数値積分あるいは式変形して行列ベクトルの形式への変換など色々な手法を活用して問題を解くことの意義をグラフィカルに示すことができる。

図5に振り子の運動方程式を解く場合のノートブック（一部）の例を示す。

振り子の運動方程式

注意：糸の長さLとしているのでラグランジアンをLではなく、Lagとした。

$$\text{Lag} = \frac{1}{2} * m * (L * \theta' [t])^2 - m * g * L * (1 -$$

ラグランジアンに代入

$$\text{shiki} = D[\partial_{\theta'} [t] \text{Lag}, t] - \partial_{\theta} [t] \text{Lag}$$

$$g L m \sin[\theta[t]] + L^2 m \theta''[t]$$

角加速度 $\theta''[t]$ を角度 $\theta[t]$ の時間2階微分したものと

Fig. 5 Notebook

力学分野の授業において、あるいはロボット工学などでもラグランジュの運動方程式を用いた導出方法が解説講義されることがある。

数式処理を活用して、エネルギーおよび、ラグランジアン の定義を行うことで半自動的に処理結果が得られるところを解説している。さらに、上記振り子の運動方程式の場合、ヤコビの楕円関数などに関連する厳密階について、さらに角度変数の大小で振り子の周期が変化する様子を級数展開（Mathematica では Series）を用いた結果比較なども教育的効果として高いと実感する。従来、高校や大学の基礎分野において、近似して公式のように覚えた関係式についても何を近似しているのか、その近似から外れるケースはどのような場合なのかなど考察すべき点は多い。これらの結果をグラフとして表現できることも理解を助けていると思われる。

Fig. 6 Graph(Displacement)

同様に、初期条件の敏感なケースとしてカオス挙動も事例としては興味深い。現在のところそこまでは立ち入らずに、非線形微分方程式（ファンデルポール、ダフィング）などのモデルを数値的に解く事例を中心に演習をすすめている。

Van der pole の微分方程式を解く

定数 ϵ を決定する。

```
 $\epsilon = 1.5;$ 
```

```
NDSolve[{式、初期条件},変数名,{時間範囲}]
```

```
kai =  
NDSolve[  
{Y'[t] -  $\epsilon \cdot (1 - Y[t]^2) \cdot Y'[t] + Y[t]$   
Y[0] == 2, Y'[0] == 0}, Y, {t, 0, 50}]
```

```
Isf = InterpolatingFunction[...]
```

Fig. 7 Notebook

非線形の運動方程式については、従来の理工系大学において「機械力学」や「振動工学」に相当する授業においても講義解説されていることが多いが、時間配分によってはあまり時間を割くことができない場合もあるかと思われる。位相平面（トラジェクトリ）などの考察もグラフィカルなイメージで理解が早まる期待がある。

Fig. 8 Displacement

Fig. 9 verbosity

変位と速度の時間波形を描画させて、さらに、位相平面も得ることができる。

Fig.10 phase-plane

さらに、ラグランジュによる運動方程式を解く事例として2自由度系（並進方向と回転方向が連成）モデルについても同様な方法で解析を行った。（台車と振り子）これらのモデルを理解すると、自動車工学におけるモデル化などにも役立てられると思われる。

Fig.11 2DOF SYSTEM

台車が水平方向に運動をし、かつ振り子が支点を中心にして回転方向に運動をしている問題である。

ラグランジュ法にもとづいてエネルギーの定義、ラグランジアンを定義をした後に、偏微分などの操作は数式処理にまかせてしまう。さらに、級数展開や近似を行うことで考察しやすくなる場合もある。

図 12 は台車の水平方向の解析結果である。

Fig.12 Displacement

さらに、図は振り子の回転方向の解析結果である。

Fig. 13 Displacement(Angle)

これらの解析結果と考察することにより、物理パラメータの与え方による結果の比較、パラメータスタディも容易になる。さらに、多自由度系の運動を議論するのであるためモードの概念なども併せて説明が可能である。

その他、乱数を活用した推定手法としてモンテカルロ法についても演習を行った。ランダムデータの描画、そして繰り返し乱数を生成することによって得られる推定値などの議論にこの Mathematica を利用した。

厳密な解を取得する方法, 近似解を推定する方法, いずれでも困難な定式化が難しいケースにも有効である。

最適化問題について, 目的関数の最大化 (最小化) そして, 制約条件の定義および設計変数について考察することで問題が解ける場合がある。その他, ニューラルネットワークの考え方を利用してエネルギー関数を定義して, その関数値の最小化問題として解く演習を行った。

グラフィックス処理, サウンド処理については, 予想通り, 学生からの反応として良いのがグラフィックス処理とそれに関連したアニメーションである。ただし, 線の太さ, 種類, ラベルの入れかたなど細かい設定が必要とするところは敷居が高いところもあるようである。サウンド処理を通じて波形のグラフィックスも同時に確認することで変調波の理解なども効果的である。

4. まとめ

授業評価アンケートなどを通じて共通の意見としては, 最初は **Mathematica** を難しいものとしてとらえているが, 実際に授業で演習やレポート課題に取り組む過程において便利さ, 面白さに気づくことが多いようである。

授業開始して2, 3回の授業で基本操作を学ぶところで **Mathematica** のくせというか特長をおさえることができれば, そのあとは容易にこなしていくことができるようである。理解できるかどうかの分かれ目が最初の基本操作に大きく関わっているようである。

今までにも, 大学院院生や卒論生が研究テーマにおいて **Mathematica** を利用するケースで質問を受けたりすることもあったので有効活用してもらえているようである。

その他, ノートブック形式の使用方法 (テンプレートの活用) など授業で随時実施しているので解析結果をまとめる過程そのもので報告書ができあがるのはとても効率的であると思われる。

工学問題を解く際に, イメージとしてとらえることその理解の補助にグラフ化は有効であり, 具体的な数値結果が出た場合にもその吟味ができることで, 計算そのものがブラックボックス化してしまうことを防ぐ効果も期待できる。大きさの検討やどの区間に解が存在すると推察できるかなどグラフ化の効果は計り知れない。

学生時代から現在も引き続きご指導いただいている山川新二名誉教授 (工学院大学) から数式処理ソフト **Reduce** のてほどきを受け, さらに故 榊原 進教授 (いわき明星大), 清水信行教授 (いわき明星大) の機械学会における講習会, あるいは東京電機大学主催の **Mathemaitca** 公開講座 (講習会) など多くの方々からのご指導から得られたことがとても貴重な経験であった。それを実感する次第である。そして, 学生に数式処理を習得してもらい, 活用することによって工学教育, また, ものづくり教育などに役立てられるよう今後も貢献していきたいと考える。お世話になっている方々へ感謝申し上げる次第である。

参考文献

- 1) 榊原進, はやわかり **Mathematica** 第二版, 共立出版, 2000.
- 2) 上坂吉則, **Mahtematica** 数値数式プログラミング, 牧野書店, 1997.
- 3) 吉本堅一, 松下修己, **Mathemaica** で学ぶ振動とダイナミクスの理論, 森北出版, 2007.