140 形状関数近似による軸力を受けるはりの振動解析

Analysis on Vibrations of a Beam Subjected to Axial Force
with a Mode Shape Function Approach

正 永井 健一(群大院) 正 丸山 真一(群大院)

○学 石神 勝也(群大院) 正 山口 誉夫(群大院)

Ken-ichi NAGAI, Gunma University, Tenjin-cho 1-5-1, Kiryu, Gunma 376-8515

Shinichi MARUYAMA, Gunma University

Katsuya ISHIGAMI, Gunma University

Takao YAMAGUCHI, Gunma University

This paper presents a new analytical procedure on bending vibrations of a beam subjected to an axial force. The procedure combines the procedures of modal expansion with finite element analysis. The beam is divided into finite number of segments. The mode shape function is introduced with the product of truncated power series and trigonometric function which is proposed by the senior author. The function is differentiable continuously with infinite times. The unknown coefficients of the mode shape function satisfy both the geometric and dynamical boundary conditions at the node of segment. Discretized equations of motion of the beam are derived from the Galerkin method. We call the analytical procedure as the Finite Segment Analysis (FSA). Based on the FSA, linear natural frequencies of a pre-buckled beam subjected to an axial force are calculated. Increasing the number of segments, the results by FSA are compared with the exact results and with the results of conventional Finite Element Method (FEM). Under the calculation with two segments by FSA, the natural frequencies from the lowest mode to the fourth mode coincide with five digits to the exact results.

Key Words : Vibration of Continuous System, Natural Frequency, Free Vibration, Finite Element Method, Mode Shape Function

本論文では、軸力を受けるはりに対して、連続微分可能な形状関数を導入し、区ごとに分割した新しい振動解析法を試みた。解析モデルを図 A1 に示す。モデルを分割する解析法としては有限要素法が挙げられるが、本報告では少ない分割数でより正確な解析を行うことを目的とし、有限要素法と区別するために有限区分解析 (FSA; Finite Segment Analysis) を提案する。有限区分解析では形状関数を有限べき級数と三角関数の余弦項の積で表す。形状関数の式は以下ようになる。

$$w_n = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^4 C_{nlk} \{ (2\xi_n)^{k-1} \cos(l-1)\pi(\xi_n - \frac{1}{2}) \} \quad (A1)$$

この形状関数は三角関数を含んでいるため連続微分が可能である。未知係数を区分の節点における未知変数、すなわち、たわみ、傾き、曲げモーメント、せん断力で表した。ついで各区間での連続性を満たす未知変数の連立方程式を導き、一様はりの解析を行った。始めに分割数による本解析の収束性を調べた。表 A1 に片持ちはりについて、分割数を変化させた場合の固有振動数を示す。表 A1 より少ない分割数でも高い収束性が得られた。つぎに、従来の有限要素法による計算結果と比較した。図 A2 に結果を示す。縦軸は厳密解からの誤差を表し、横軸は振動次数を表す。比較する条件として未知数の数を同じにした。二分割の有限区分解析が四分割の有限要素法と対応している。図 A2 より、本解析は従来の有限要素法より低分割で未知数が少なくても精度がよく、本解析の二分割の計算結果は有限要素法の三十分割と同程度の精度を持つ。さらに一様はりに初期軸力を加え、境界条件が固定-単純支持の座屈前のはりについて、固有振動数を求めた。本解析による固有振動数の結果と厳密解を図 A3 に示す。縦軸は無次元の軸力を示し、横軸は無次元固有振動数を示している。図 A3 より有限区分解析による値は厳密解と一致しており、軸力を考慮しても精度良く解析できることを明らかにした。

Fig.A1 Model and coordinate system

Table A1 Natural frequencies of CF beam

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1 division	3.516017	22.03472	61.66328	126.8978	
2 divisions	3.516016	22.03450	61.69752	120.9032	199.8618
3 divisions	3.516015	22.03449	61.69724	120.9021	199.8606
exact results	3.516015	22.03449	61.69721	120.90192	199.8595

Fig.A2 Errors of natural frequencies of CF beam between FSA and with FEM

Fig.A3 Lowest natural frequencies under the axial force of the CS beam

1. 緒言

近年の機械は軽量化するために薄肉構造要素が多く用いられている。計測の分野においては MEMS(Micro Electro Mechanical System)と呼ばれる微細な計測センサーの研究が盛んである。MEMS は寸法が微小で、薄肉の弾性素子などを含み、形状が複雑であり、線形問題を含め大変形を伴う非線形問題の高精度の解析を行う必要がある。薄肉構造の解析にはモデルを要素分割する有限要素法⁽¹⁾が行われ、近年では、有限要素法を用いた非線形振動解析も多く研究されている⁽²⁾⁻⁽⁴⁾。

しかし、従来の有限要素法では、形状関数は主に有限べき級数を用いられ、要素の境界における連続条件がたわみと傾きのみの解法が多い。そのため、精度向上には分割数をさらに増やす必要がある。

本報告では少ない分割数でより高精度な解析を行うことを目的とし、連続微分可能な形状関数を導入し、有限要素法を発展させた有限区分解析 (Finite Segment Analysis, FSA) を提案した。具体的には解を近似するための形状関数は、高階までの微分が可能である三角関数と有限べき級数の積の一次結合^{(5),(6)}を用いた。この形状関数を用いた従来の解法では、主に有限べき級数のみで境界条件を満たすように未定係数を決定して、振動解析を行っている。

有限区分解析では、形状関数の未知係数を区分の節点における未知変数、すなわち、たわみ、傾き、曲げモーメント、せん断力で表した。ついで各区分間での連続性を満たす未知変数の連立方程式を導き、解析を行った。

解析ではまず、初期軸力の働かない一様はりに対し、固有振動数を求めた。境界条件を固定-自由、両端単純支持、固定-単純支持ならびに両端固定として、分割数による固有振動数の収束性を調べた。さらに有限区分解析と有限要素法に対し、精度の比較を行った。

最後に境界条件が両端単純支持、固定-単純支持、両端固定である一様はりについて、初期軸変位を与え、有限区分解析を用いて座屈前の固有振動数を求めた。結果を厳密解と比較し、初期軸力の加わった有限区分解析の精度を検証した。

2. 解析手法

解析するはりとはりの座標系の概要を図 1 に示す。長さ L 、ヤング率 E 、断面二次モーメント I の一様で不整のないはりに軸力 N_x が与えられており、 z 方向にたわみ $W(x, t)$ 、 x 方向に軸方向変位 $U(x, t)$ 変形する。はりを N 個の区分に分け、各区分節点の座標をそれぞれ $x_{[0]}, x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[N]}$ とする。 $x_{[n-1]}$ から $x_{[n]}$ までの長さを l_n 、節点 $x_{[n-1]}$ と $x_{[n]}$ でのたわみ $W_{[n-1]}$ と $W_{[n]}$ 、区分 n 内の任意位置でのたわみを $W_n(x, t)$ とし、区分 n に働く軸力を N_{xn} とする。本解析では線形で解析を行うので、はりは十分に薄肉であるものとし、 W は十分に小さく N_x に影響しないと仮定する。

ϵ_{xn} は区分 n 内の軸方向ひずみを表し、つぎのようになる。

$$\epsilon_{xn} = U_{n,x} - \frac{1}{2} W_{n,x}^2 - z W_{n,xx} \quad (1)$$

区分 n の運動エネルギー $\tilde{T}_n$ 、ひずみエネルギー $\tilde{U}_n$ はつぎのようになる。ただしカンマの後の添字はそれに関する偏微分を示す。

$$\tilde{T}_n = \frac{1}{2} \int_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} \int_A \rho W_{n,t}^2 dAdx \quad (2)$$

$$\tilde{U}_n = \int_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} \int_A \frac{1}{2} E (U_{n,x} - \frac{1}{2} W_{n,x}^2 - z W_{n,xx})^2 dAdx \quad (3)$$

式(2), (3)では断面に関する積分を行う。断面は中立軸に対し対称性をもつので、積分の結果、一次の z を含む項は 0 となり、次式で示される。

$$\tilde{T}_n = \frac{1}{2} \int_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} \rho A (U_{n,t}^2 - W_{n,t}^2) dx \quad (4)$$

$$\tilde{U}_n = \int_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} \frac{1}{2} EA (U_{n,x} - \frac{1}{2} W_{n,x}^2)^2 - \frac{1}{2} EI W_{n,xx}^2 dAdx \quad (5)$$

式(4), (5)より区分 n についてのラグランジアン $\tilde{L}_n = \tilde{T}_n - \tilde{U}_n$ が定まる。これを全区分について総和をとると、はり全体のラグランジアン $\tilde{L}$ を得る。はり全体のラグランジアンにハミルトンの原理を適用すると次式が得られる。ただし、 $t = t_0$ と $t = t_1$ において $\delta U_n = 0$ 、 $\delta W_n = 0$ とおく。 S_{xn} 、 M_{xn} 、 Q_{xn} は区分 n における傾き、曲げモーメント、せん断力を表す。

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L} dt &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^N \tilde{L}_n dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^N \int_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} \{ -N_{xn,x} \delta U_n \\ &\quad + (\rho A W_{n,t}^2 - M_{xn,xx} - (N_{xn} W_{n,x})_{,x}) \delta W_n \} dx \\ &\quad + [N_{xn} \delta U_n]_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} \\ &\quad + [Q_{xn} \delta W_n]_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} - [M_{xn} \delta S_{xn}]_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} \} dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$N_{xn} = EA (U_{n,x} - \frac{1}{2} W_{n,x}^2) \quad (6b)$$

$$S_{xn} = W_{n,x} \quad (6c)$$

$$M_{xn} = -EI W_{n,xx} \quad (6d)$$

$$Q_{xn} = N_{xn} W_{n,x} - M_{xn,xx} \quad (6e)$$

Fig.1 Model and coordinate system

軸方向の運動方程式

$$N_{xn,x} = 0 \quad (7)$$

たわみ方向の運動方程式

$$\rho A W_{n,tt} - (N_{xn} W_{n,x})_{,x} - M_{n,xx} = 0 \quad (8)$$

したがって、 $N_{xn,x} = 0$ が得られ、端部には軸力 N_x が与えられているので、区分 n 内の任意位置での軸力 N_{xn} は一定となり、 $N_{xn} = N_x$ となる。

つまり、運動エネルギーとひずみエネルギーはつぎのようになる。

$$\bar{T}_n = \frac{1}{2} \int_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} \rho A W_{n,t}^2 dx \quad (9)$$

$$\bar{U}_n = \frac{1}{2} \int_{x_{[n-1]}}^{x_{[n]}} (N_x W_{n,x}^2 + EI W_{n,xx}^2) dx \quad (10)$$

無次元化を行うために以下の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} \xi_n &= [x - (x_{[n]} + x_{[n-1]})/2] / l_n, \quad l_n = x_{[n]} - x_{[n-1]}, \\ d_n &= L / l_n, \quad w_n = W_n / r, \quad r = \sqrt{I / A}, \quad n_x = N_x (L^2 / EI), \\ \tau &= \Omega_0 t, \quad \Omega_0 = L^{-2} \sqrt{EI / \rho A}, \quad s_{xn} = S_{xn} (L / r), \\ m_{xn} &= M_{xn} (L^2 / EI r), \quad q_{xn} = Q_{xn} (L^3 / EI r), \\ (\bar{L}_n, \bar{T}_n, \bar{U}_n) &= (\bar{L}_n, \bar{T}_n, \bar{U}_n) (L^3 / EI r^2) \end{aligned} \quad (11)$$

なお ξ は無次元の x 座標であり、 ξ_n は n 区分内の無次元座標である。 ξ_n は $x_{[n-1]}$ から $x_{[n]}$ までの座標をそれぞれ $-1/2$ から $1/2$ までに対応させてある。 l_n は区分の長さであり、 d_n は分割比、 r は基準断面二次半径、 Ω_0 ははりの固有振動数に関する量である。 w_n はたわみの無次元量であり、 n_x は無次元の軸力、 τ は時間の無次元量である。 s_{xn} 、 m_{xn} 、 q_{xn} は区分 n のそれぞれ無次元の傾きと曲げモーメント、せん断力を示す。

式(11)の無次元量を導入すると式(9)、式(10)は次式のように無次元化される。

$$\bar{T}_n = \frac{1}{2} d_n^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} w_{n,\tau}^2 d\xi_n \quad (12)$$

$$\bar{U}_n = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} (d_n n_x w_{n,\xi_n}^2 + d_n^3 w_{n,\xi_n \xi_n}^2) d\xi_n \quad (13)$$

無次元化された区分 n のラグランジアン $\bar{L}_n$ はつぎのようになる。

$$\bar{L}_n = \bar{T}_n - \bar{U}_n \quad (14)$$

式(11)より式(6c)-(6e)は次式のように無次元化される。

$$s_{xn} = d_n w_{n,\xi_n} \quad (15a)$$

$$m_{xn} = -d_n^2 w_{n,\xi_n \xi_n} \quad (15b)$$

$$q_{xn} = -d_n^3 w_{n,\xi_n \xi_n \xi_n} \quad (15c)$$

はりの曲げに関する形状関数は三次までの有限べき級数と三角関数の余弦項で近似する。

$$\{\zeta_n\} = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^4 \{(2\xi_n)^{k-1} \cos(l-1)\pi(\xi_n - \frac{1}{2})\} \quad (16)$$

$$w_n = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^4 C_{nlk} \{(2\xi_n)^{k-1} \cos(l-1)\pi(\xi_n - \frac{1}{2})\} \{\zeta_n\}^T \cdot \{C_n\} \quad (17)$$

区分 n の節点 $\xi_n = -1/2$ と $\xi_n = 1/2$ における、たわみ w_n 、傾き s_{xn} 、曲げモーメント m_{xn} 、せん断力 q_{xn} をつぎのようにおく。

$\xi_n = -1/2$ の場合

$$\begin{aligned} w_n &= w_{[n-1]}, \quad d_n w_{n,\xi_n} = s_{[n-1]}, \\ -d_n^2 w_{n,\xi_n \xi_n} &= m_{[n-1]}, \quad -EI d_n^3 w_{n,\xi_n \xi_n \xi_n} = q_{[n-1]} \end{aligned} \quad (18)$$

$\xi_n = 1/2$ の場合

$$\begin{aligned} w_n &= w_{[n]}, \quad d_n w_{n,\xi_n} = s_{[n]}, \\ -d_n^2 w_{n,\xi_n \xi_n} &= m_{[n]}, \quad -EI d_n^3 w_{n,\xi_n \xi_n \xi_n} = q_{[n]} \end{aligned} \quad (19)$$

式(17)に式(18)、(19)を代入すると、つぎの関係式を得る。

$$D_n \cdot Z_n \cdot C_n = D_n \cdot w_{en} \quad (20a)$$

$$D_n = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_8 \end{bmatrix} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= D_5 = 1, \quad D_2 = D_6 = d_n, \\ D_3 &= D_7 = -d_n^2, \quad D_4 = D_8 = -d_n^3 \end{aligned} \quad (20c)$$

$$[Z_n] = \begin{bmatrix} \{\zeta_{[n-1]}\}^T \\ \{\zeta_{[n-1],\xi_n \xi_n}\}^T \\ \{\zeta_{[n-1],\xi_n \xi_n \xi_n}\}^T \\ \{\zeta_{[n-1],\xi_n \xi_n \xi_n}\}^T \\ \{\zeta_{[n]}\}^T \\ \{\zeta_{[n],\xi_n}\}^T \\ \{\zeta_{[n],\xi_n \xi_n}\}^T \\ \{\zeta_{[n],\xi_n \xi_n \xi_n}\}^T \end{bmatrix} \quad (20d)$$

ただし $[D_n]$ は区分 n の各諸量による係数行列であり、 $[Z]$ は区分 n の形状関数の 0 階、1 階、2 階、3 階微分を表す 8×8 行列、 $\{C_n\}$ は区分 n の形状関数の係数ベクトル、 $\{w_{en}\}$ は区分 n 内の節点における w_n 、 w_{n,ξ_n} 、 $w_{n,\xi_n \xi_n}$ 、 $w_{n,\xi_n \xi_n \xi_n}$ を表すベクトルである。

式(20a)を係数ベクトル $\{C_n\}$ について解くとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \{C_n\} &= ([D_n] \cdot [Z_n])^{-1} \cdot ([D_n] \cdot \{w_{en}\}) \\ &= [N_n] \cdot \{w_{en}\} \end{aligned} \quad (21a)$$

$$[N_n] \cdot ([D_n] \cdot [Z_n])^{-1} \quad (21b)$$

$$\{w_{en}\} \cdot [D_n] \cdot \{w_n\} \quad (21c)$$

したがって、区分内の任意位置でのたわみ w_n は次式で表される。

$$w_n(\xi_n, \tau) = \{\xi_n\}^T \cdot [N_n] \cdot \{w_{en}\} \quad (22)$$

式(22)を無次元化されたエネルギー式(12), (13)に代入して各区分の $\bar{T}_n$ と $\bar{U}_n$ がつぎようになる。

$$\bar{T}_n = \frac{1}{2} \{w_{en}\}_{,\tau}^T \cdot M_n \cdot \{w_{en}\}_{,\tau} \quad (23)$$

$$M_n = d_n^{-1} [N_n]^T \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \{\xi_n\} \cdot \{\xi_n\}^T d\xi_n \cdot [N_n]$$

$$\bar{U}_n = \frac{1}{2} \{w_{en}\}^T \cdot K_n \cdot \{w_{en}\} \quad (24)$$

$$K_n = d_n^3 n_x [N_n]^T \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \{\xi_n\}_{,\xi_n} \cdot \{\xi_n\}_{,\xi_n}^T d\xi_n \cdot [N_n]$$

$$d_n^3 [N_n]^T \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \{\xi_n\}_{,\xi_n \xi_n} \cdot \{\xi_n\}_{,\xi_n \xi_n}^T d\xi_n \cdot [N_n]$$

区分を N 個持つ全体の振動系のラグランジアン $\bar{L}$ は区分ごとのラグランジアン $\bar{L}_n$ 、 $\bar{T}_n - \bar{U}_n$ を区分数 N だけ加え合わせてつぎようになる。

$$\bar{L} = \sum_{n=1}^N \bar{L}_n = \sum_{n=1}^N [\bar{T}_n - \bar{U}_n] \quad (25)$$

ここで上式にハミルトンの原理を適用する。

上式を時間 τ について部分積分を行う。 $\tau = \tau_0$ と τ_1 で $\delta\{w\} = 0$ を考慮するとつぎようになる。

$$-\int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta\{w\}^T \cdot [M] \cdot \{w\}_{,\tau\tau} - [K] \cdot \{w\} d\tau = 0 \quad (26)$$

ただし w 、 M 、 K はそれぞれ w_{en} 、 M_n 、 K_n を区分ごとに足し合わせた行列とベクトルである。式(26)より、運動方程式を得る。

$$[M] \cdot \{w\}_{,\tau\tau} - [K] \cdot \{w\} = 0 \quad (27)$$

境界での条件を考える。

両端単純支持(SS)

$$w_{[0]} = m_{[0]} = 0, \quad w_{[N]} = m_{[N]} = 0 \quad (28)$$

単純支持-固定(SC)

$$w_{[0]} = m_{[0]} = 0, \quad w_{[N]} = s_{[N]} = 0 \quad (29)$$

両端固定支持(CC)

$$w_{[0]} = s_{[0]} = 0, \quad w_{[N]} = s_{[N]} = 0 \quad (30)$$

固定-自由(CF)

$$w_{[0]} = s_{[0]} = 0, \quad m_{[N]} = q_{[N]} = 0 \quad (31)$$

線形固有振動数を求める。 w をつぎのように仮定する。

$$\{w\} = \{\phi\} \cos \omega \tau \quad (32)$$

ただし $\{\phi\}^T = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{4N}]$, $\omega = \Omega / \Omega_0$ においてある。

なお Ω は振動数である。

式(32)を式(26)に代入し、特性方程式を解いて無次元固有振動数 ω_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 4N$) が求まる。

3.解析結果及び検討

有限区分解法を用いて一様はりの解析を行う。

始めに境界条件を固定-自由(CF)、両端自由(SS)、固定-自由(CS)ならびに両端固定(CC)とした際の有限区分解法と厳密解の比較を行い、本解析の分割数による計算値の収束性と、それぞれの境界条件での精度の検証を行う。

つぎに未知数の数を揃えたときの、有限区分解法と従来の有限要素法との精度の比較について行う。

最後に両端自由(SS)、固定-自由(CS)、両端固定(CC)のはりに初期軸力を与え、座屈前の固有振動数を求め、厳密解との比較を行う。

ただし、五次を超える振動モードはオイラーの仮説に当てはまらなくなるので求めないものとする。

3.1 本解析の分割数による計算値の収束性 表 1-4 は固定-自由(CF)、両端自由(SS)、固定-自由(CS)ならびに両端固定(CC)の境界条件の下での有限区分解法と厳密解の固有振動数を示した表であり、図 2 は特に片持ちはりについて取り上げ、分割数と固有振動数の関係を示した図である。図 2 の縦軸は無次元固有振動数 ω_i を表し、横軸は分割数 n を表している。また破線は厳密解を示す。図 2 より、有限区分解法では低い分割数でも収束性が高く三分割で五次モードまでの実用上十分な固有振動数を得る。

Table 1 Natural frequencies of CF beam

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1 division	9.869606	39.47786	90.20957	145.0810	
2 divisions	9.869606	39.47843	88.82647	157.9114	247.3472
3 divisions	9.869605	39.47842	88.82646	157.9137	246.7409
exact results	9.869604	39.47842	88.82644	157.9137	246.7401

Table 2 Natural frequencies of SS beam

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1 division	3.516017	22.03472	61.66328	126.8978	
2 divisions	3.516016	22.03450	61.69752	120.9032	199.8618
3 divisions	3.516015	22.03449	61.69724	120.9021	199.8606
exact results	3.516015	22.03449	61.69721	120.90192	199.8595

Table 3 Natural frequencies of CS beam

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1 division	15.41823	49.96424	106.4320	150.1554	
2 divisions	15.41821	49.96490	104.2484	178.2775	272.7728
3 divisions	15.41821	49.96488	104.2477	178.2699	272.0354
exact results	15.41821	49.96486	104.2477	178.2697	272.0310

Table 4 Natural frequencies of CC beam

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1 division	22.37349	61.63815	125.0312	145.3079	
2 divisions	22.37330	61.67291	120.9069	199.8571	299.1888
3 divisions	22.37329	61.67285	120.9035	199.8601	298.5712
exact results	22.37329	61.67282	120.9034	199.8594	298.5555

表 1-5 より、一分割の有限区分解で求めた最低次固有振動数を厳密解と比較する。記載した全ての境界条件で最低次固有振動数は六桁満たす。三分割の有限区分解では、五次の固有振動数を四桁満たす。したがって、有限区分解ではさまざまな境界条件において、精度良く解析が行える。

つぎに有限区分解で求めた形状関数で固有振動モードを描かせ、厳密解と比較する。図 3 は有限区分解を分割数なしで求めた結果と厳密解を比較した結果であり、図 4 は有限区分解を二分割で求めた結果と厳密解を比較した結果である。横軸は無次元座標を示し、縦軸は無次元のたわみを示す。図 3 より一次から三次の固有振動数は一致している。四次の固有振動モードは厳密解からずれている。四次の固有振動数は厳密解からわずかにずれており、そのため固有振動モードの若干の差異を生じている。図 4 より有限区分解と厳密解の四次までの固有振動モードは一致しており、図 3 の一分割の結果より精度が高くなっている。したがって、有限区分解では二分割で十分な固有振動モードを得ることができる。

3.2 有限区分解と有限要素法との比較 図 5 に有限区分解と有限要素法の未知数の数を同じにした際の、精度について比較を行った図を示す。解析モデルは軸力の働かないような片持ちはりとした。図 5 の縦軸は厳密解からの誤差を表し、横軸は振動次数を表す。有限要素法の形状関数を三次までの有限べき級数の和で表し、満たしている連続性はたわみと傾きのみとした。未知数の数を同じにして比較する際、有限区分解の二分割が有限要素法の四分割に対応する。図 5 より本解析の方が厳密解に近く、精度が良いことが分かる。

Fig.2 Convergence of natural frequencies

有限要素法では高次の固有振動数になるにつれ精度が大きく下がるが本解析は有限要素法に比べ、高次の固有振動数でも精度の低下が少ないことが分かる。二分割の本解析における五次の固有振動数と同程度の精度を持つ有限要素法の分割数は三十分割程度である。

本解析では有限べき級数と三角関数の積で表した形状関数を用い、たわみ、傾き、曲げモーメント、せん断力の連続性を満たしているため、有限要素法より精度が良くなっていると考えられる。

3.2 初期軸力を与えたはりの座屈前までの解析 両端自由(SS), 固定-自由(CS), 両端固定(CC)の境界条件の下で、一様はりに初期軸力を加えた際の、本解析による固有振動数の結果と厳密解を図 6-8 に示す。図の縦軸は無次元の初期軸力を表し、横軸は無次元固有振動数を表している。図 9 より本解析による値は厳密解と一致しており軸力が座屈する値の付近になると振動数が 0 に近づく。したがって、有限区分解では軸力を加えた場合でも精度良く固有振動数を求めることができる。

Fig.3 Natural modes of vibrations of the CF beam compared with 1 division of FSA and exact solution

Fig.4 Natural modes of vibrations of the CF beam compared with 2 divisions of FSA and exact solution

Fig.5 Errors of natural frequencies of CF beam between FSA and with FEM

Fig.6 Lowest natural frequencies under the axial force of the SS beam

Fig.7 Lowest natural frequencies under the axial force of the CS beam

Fig.8 Lowest natural frequencies under the axial force of the CC beam

4.結言

有限べき級数に三角関数積の一次結合を形状関数を用い、たわみ、傾き、曲げモーメント、せん断力の連続性を満たした有限区分解析を用いて形状が一様なはり解析した。得られた結果を以下に示す。

- (1) 本解析で用いた形状関数は収束性が良く、片持ちはりの場合、三分割で五次モードまでの実用上十分な固有振動数を得る。さらに、両端単純支持、固定-単純支持、

両端固定のさまざまな境界条件においても、低分割で精度良い固有振動数を得た。そして形状関数は低分割で、実際のモード形状に近い近似を行うことができた。

- (2) 有限区分解析と有限要素法で片持ちはりを解析し、精度を比較した。本解析は従来の有限要素法より低分割で未知数が少なくても精度がよく、本解析の二分割の計算結果は有限要素法の三十分割と同程度の精度を持つ。
- (3) 初期軸力を与えたはりの座屈前までの解析を行った。厳密解と有限区分解析の結果は一致しており、有限区分解析では軸力を加えた場合でも、精度良く固有振動数を求めることができる。

文献

- (1) 永井健一，ダイナミクスのシステム解析，(2000)，森北出版
- (2) 小林幸徳，山田元，原田晃，有限要素法を用いた非線形振動解析の低次元化モデル，機論，67-657，C(2001)，pp.1330-1337
- (3) 山口誉夫，ほか3名，初期軸圧縮変位により形状が変化する2Dビーム構造の共振特性の幾何学的非線形FEM解析，機論，73-736，C(2007)，pp.3136-3142
- (4) P.Ribeiro, M.Petyt, Nonlinear vibration of plates by the hierarchical finite element and continuation methods, International Journal of Mechanical Sciences, 41(1999), pp.437-459
- (5) 永井健一，ほか3名，形状関数近似による質量搭載片持りの曲げ振動解析，機論，55-516，C(1989)，pp.1941-1947
- (6) 永井健一，ほか3名，分布荷重をうける集中質量搭載はりの曲げ振動解析，機論，54-497，C(1988)，pp.39-46