228 デジタルフィルタによる過渡振動現象分析

Analysis of Transient Vibration Phenomenon by Using Digital Filter

○学 永田 泰夫 (神奈川大院)

学 山口 尚人 (神奈川大院)

正 山崎 徹 (神奈川大)

正 菅原淳一 (株式会社先端技術開発研究所)

Yasuo NAGATA Graduate School of Kanagawa University, 3-27-1 Rokkakubashi, Kanagawa-ku, Yokohama
 Naoto YAMAGUCHI, Graduate School of Kanagawa University
 Toru YAMAZAKI, Kanagawa University & Sentan, Inc.
 Junichi SUGAWARA, Sentan, Inc.

We are studying a new analysis method for transient responses by using the digital filter. This paper demonstrates some time-frequency analysis results of responses based on typical differential equations. First, we present the results for the linear free and forced vibration responses of one degree-of-freedom system. Then we consider the responses based on Duffing's equation and it is shown that the dominant frequency change of the responses can be visualized in the time-frequency analysis results. And the responses based on Van del Pol and Mathieu equations are analyzed to understand the several dominant frequencies. Finally, we apply the time-frequency analysis to the data of car bumping and it is shown that the phenomena may be described by the Duffing's equation.

Key words: Transient Response, Vibration, Signal Processing, Nonlinear Vibration, System Identification, Time-frequency analysis

A1. はじめに

著者らは、古くからあるデジタルフィルタの概念と PC の性能向上から、デジタルフィルタによる三次元周波数分析手法の開発を行っている。分析事例として、自動車の通過音を計測した時刻歴データの三次元周波数分析結果を FigA1 に示す。自動車が計測マイクを通過する 0.8s 前後で、周波数が変化し、低くなっていることが読み取れ、ドップラー効果を可視化することができている。この例の他にも、三次元周波数分析により様々な過渡的な現象の分析を行うことができ、システム同定などに有効と考えている。

そこで本報では、デジタルフィルタによる三次元周波数分析技術により、過渡応答および非線形振動の微分方程式の数値応答解を分析したことを報告する。

A2. 線形および非線形方程式の分析

一自由度系の線形振動, Duffing 方程式および Van del Pol 方程式, Mathieu 方程式を対象とした。線形振動では、自由振動と強制振動を分析し、非線形振動では Duffing 方程式の振幅依存性, Van del Pol 方程式の奇数高調波, Mathieu 方程式のパラメータ励振などの現象の把握を行った。

A3. 実現象分析への適用への試み

自動車の突起乗り越え時のばね下振動の時刻歴応答データを三次元周波数分析し、突起乗り越え時の振動数の変化を確認した。この際に、Duffing 方程式を分析した結果と類似している点が見受けられた。そこで、モデル化の可能性を確認するために、Duffing 方程式に基づくシミュレーションを実施した。

A4. おわりに

本研究では、以下の知見を得た。

Fig.A1 Visualization of Doppler's effect as an example of time-frequency analysis by using the developed digital soft for the passage sound. The car passed the microphone at 0.8s.

- (1)線形振動応答の三次元周波数分析を行った。
- (2)Duffing 方程式の応答の三次元周波数分析を行い、初期条件による振動数の変化、高調波成分の出現を確認できることを示した。
- (3)Van del Pol 方程式の応答の三次元周波数分析により、非線形パラメータが大きくなるにつれて高調波成分が顕著となることを確認できることを示した。
- (4) Mathieu 方程式の応答の三次元周波数分析により、パラメータ励振の発生条件が、 $\omega_0 \approx 2\omega$ であることと、発生した振動数が、系の固有振動数に一致することも確認した。
- (5)三次元周波数分析を自動車の突起乗り越え時の時刻歴応答データの分析に利用し、振動数が変化することを確認した。
- (6)突起乗り越え時の振動応答のモデルとして、Duffing 方程式を考え、数値シミュレーションを実施し、モデル化への手ごたえを得た。

1. はじめに

振動騒音などの各種センサーで計測した信号の周波数分析手法として FFT 分析が一般的に用いられる。FFT 手法は基本的に定常的な信号処理解析手法であり、一定時間の信号の平均的な周波数分析手法である。

一方、FFT 分析では刻々と変化する信号の瞬間的な周波数変化などを把握するには不向きである。このような信号に対応する周波数分析手法としては、STFT (Short Time Fourier Transform) やウェーブレット変換⁽¹⁾などがある。STFT は、ウィンドウを使用することにより時系列データ数を短く切り出し、周波数分解能を大きくすることで精度良く分析しようとするものである。しかしながら、STFT では時系列データの切り出しのフレームサイズ以下での分析はできなくなってしまうため、瞬間的な周波数変換の見極めに注意が必要となる。また、ウェーブレット変換は、デジタルフィルタ処理のひとつであり、周波数に対応する波長に合せて分析を行うため、効率良い分析が可能である。ただし、ウェーブレット変換に用いる基底関数となるマザーウェーブレット関数が必要となり、この選択によって異なる分析結果となるため、適切なマザーウェーブレット関数の選択が重要となる。

以上の背景の下、著者らは、古くからあるデジタルフィルタの概念⁽²⁾⁽³⁾と PC の性能向上から、デジタルフィルタによる三次元周波数分析手法の開発を行っている⁽⁴⁾。図 1 に、分析事例として、自動車の通過音を計測した時刻歴データの三次元周波数分析結果を示す。自動車が計測マイクを通過する 0.8s 前後で、周波数が変化し、低くなっていることが読み取れる。すなわち、ドップラー効果を可視化することができている。この例の他にも、三次元周波数分析により様々な過渡的な現象の分析を行うことができ、システム同定などに有効と考えている。

そこで本報では、デジタルフィルタによる三次元周波数分析技術による各種現象分析手法の開発を目指し、過渡応答および非線形振動の微分方程式の数値応答解を分析したことを報告する。本報では、一自由度系の線形振動、Duffing 方程式および Van del Pol 方程式、Mathieu 方程式を対象とする。また、実車の突起乗り越え時の振動分析を行い、分析結果から現象の記述を行い、過渡応答分析および非線形振動分析への可能性の分析解明を試みたことを

Fig.1 Visualization of Doppler's effect as an example of time-frequency analysis by using the developed digital filter soft for the passage sound. The car passed the microphone at 0.8s.

報告する。

2. 線形振動の応答分析

本章では、非線形振動に先立ち、線形振動の一自由度系を対象に三次元周波数分析を実施する。

2・1 運動方程式 次の一自由度系の運動方程式を考える。

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 x は質点変位、 ζ は減衰比、 ω_n は固有角振動数、 f は質点に作用する外力である。以下では、 $\omega_n = 2\pi \cdot 50$ rad/s、 $\zeta = 0.1$ 、 $f = 10 \sin(2\pi \cdot 75t)$ N/kg とする。

2・2 自由振動応答の分析 初期変位 $x_0 = 0.01$ m、初期速度 $v_0 = 0.0$ m/s の初期条件における自由振動応答 $x(t)$ を考える。応答の算出には Matlab を使用した。

図 2(a) に自由振動応答の時刻歴応答波形、同図(b) にデジタルフィルタによる三次元周波数分析結果を示す。ピーク振動数は 50Hz であり、固有振動数と一致していることが確認できる。また、時間の経過と共に減衰していく様子も観察することができている。

2・3 強制振動応答の分析 次に、加振振動数 75Hz の正弦加振力が作用するときの強制振動応答解の時刻歴応答波形を図 2(c) に、その分析結果を同図(d) に示す。

過渡状態において自由振動 (50Hz) と加振振動数 (75Hz) にピークが観察される。また、定常状態では自由振動 (50Hz) は減衰し、加振振動数 (75Hz) だけのピークとなることが確認できる。

以上、応答の明確な 1 自由度線形振動系の自由振動および強制振動の応答波形について、本研究で用いたデジタルフィルタによる三次元周波数分析によって現象を正しく把握できていることが確認できる。

3. Duffing 方程式の応答分析

次に、非線形振動の代表的な方程式のひとつである、Duffing 方程式の応答を例に三次元周波数分析結果を示す。

3・1 Duffing 方程式 1 自由度振動系において、ばねの反力に非線形性を有する次式を対象とする。

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2(x + \beta x^3) = f \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 β は非線形度を表し、 $\beta = 0$ のとき式(1)の線形振動の方程式と一致する。 $\beta > 0$ の場合には hardening 型、 $\beta < 0$ の場合には softening 型のばねを表す⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

3・2 応答分析 式(2)において、前章と同様に、 $\omega_n = 2\pi \cdot 50$ rad/s、 $\zeta = 0.02$ 、 $f = 150 \sin(2\pi \cdot 75t)$ N/kg、非線形度 $\beta = 20000$ とし、初期変位 x_0 を 0.03m と 0.01m とした二つの場合について、Matlab により応答算出を行った。図 3 に、時刻歴応答波形と三次元周波数分析結果 (ただし dB 表示) をそれぞれ示す。

初期変位 x_0 を 0.03m とした図 3(a) と (b) では、応答初期の振動振幅が大きいため、ばね定数相当が大きくなり、およそ 200Hz 程度の自由振動がピーク振動数となり、振動振幅が減衰し小さくなるにつれピーク振動数が低くなっている。自由振動が十分に減衰すると、ピーク振動数が高低を繰り返し、加振振動数 (75Hz) に落ち着いている。また、Duffing 方程式の応答の特徴である、第三

高調波を観察することができる。

一方、初期変位 x_0 が 0.01m の図 3(c)と(d)では、初期変位 x_0 が 0.03m の場合と、振幅に依存する固有振動数が変化する自由振動時の挙動は異なるが、強制振動時には、0.3s 以降では似た状態となっている。

以上のように、三次元周波数分析により Duffing 方程式の応答

の特徴を見出すことができる。ジャンプ現象などの Duffing 方程式の典型的な挙動などについては、ここで得た三次元周波数分析結果を基に検討することを今後の予定としている。

4. Van del Pol 方程式の応答分析

次に、Van del Pol 方程式の応答の三次元周波数分析を実施する。

4.1 運動方程式 次式で表される Van del Pol 方程式を対象

(a) Time response of linear free vibration

(b) Time-frequency analysis result of linear free vibration

(c) Time response of linear forced vibration

(d) Time-frequency analysis result of linear forced vibration

Fig.2 Analysis results in case of linear one degree of freedom system

(a) Time response of Duffing's equation with $x_0=0.03m$

(b) Time-frequency analysis result of Duffing's equation with $x_0=0.03m$ (dB scale)

(c) Time response of Duffing's equation with $x_0=0.01m$

(d) Time-frequency analysis result of Duffing's equation with $x_0=0.01m$ (dB scale)

Fig.3 Analysis result of Duffing's equation in case of $\beta=20000$

とする.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (3)$$

ここで, μ は非線形パラメータであり, 本報では 50, 500, 5000 の三つの場合について検討する. なお, $\omega_n = 2\pi \cdot 50$ rad/s, 初期変位 $x_0 = 0.01$ m, 初期速度 $v_0 = 0.0$ m/s とする.

4.2 応答分析 各場合の時刻歴応答波形と三次元周波数分析結果を図4に示す.

(a) $\mu = 50$ のとき 初期変位により振動は成長し, 一定振幅に収束する. 振動の成長段階では, 設定した ω_n (50Hz) だけがピーク振動数として現れているが, 定常状態になるにつれ 150Hz の第三高調波成分など奇数高調波が生じていることが分かる.

(b) $\mu = 500$ のとき $\mu = 50$ のときと同様であるが, 収束までの成長が早い. この場合にも基本波とその奇数次高調波が現れているが, $\mu = 50$ のときより高調波の度合いが増していることが確認できる. また, この場合の基本波は ω_n (50Hz) より低い約 44Hz であることも確認できる.

(a) Time response in case of $\mu = 50$

(a) Time response in case of $\mu = 500$

(a) Time response in case of $\mu = 5000$

(c) $\mu = 5000$ のとき 瞬時に矩形波に近い波形が形成され, その定常振動となる. このときの基本波は約 11Hz であり, 第三高調波が最も大きいことが確認できる. また, 鋭い応答時に, インパルス的な影響と同様に様々な周波数が励起されていることが観察される.

5. Mathieu 方程式の応答分析

次に, Mathieu 方程式の応答の三次元周波数分析を行う.

5.1 Mathieu 方程式 1 自由度振動系において, ばね定数に時間的変化を有する次式を対象とする.

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \Gamma \cos \omega t)x = 0 \quad (4)$$

ここで, ω_0 は固有振動数, ω は張力の変化の角振動数, Γ は励振率である. 以下では, $\omega_0 = 2\pi \cdot 50$ rad/s, $\Gamma = 0.1$ とする. なお, ω を本報では $4\pi \cdot 1$ rad/s, $4\pi \cdot 50$ rad/s, $4\pi \cdot 100$ rad/s とする.

5.2 応答分析 各場合の時刻歴応答波形と三次元周波数分析結果を図5にそれぞれ示す.

(b) Time-frequency analysis result in case of $\mu = 50$ (dB scale)

(b) Time-frequency analysis result in case of $\mu = 500$ (dB scale)

(b) Time-frequency analysis result in case of $\mu = 5000$ (dB scale)

Fig.4 Analysis result of Van del Pol's equation in three cases of μ

(a) $\omega=4\pi\cdot 50$ rad/s のとき 振動が成長して振幅が大きくなる挙動が見られ、これはこの系のパラメータ励振であることが確認できる。また、0.6s 以降で 150Hz の第三高調波が生じていることが確認できる。

(b) $\omega=4\pi\cdot 1$ rad/s のとき $\omega=4\pi\cdot 50$ rad/s のときの結果とは異なり、振動が大きくなる挙動は確認できない。よって、この角振動数においてパラメータ励振は発生していないことがいえる。また、 ω が小さいことによる緩やかな変化の影響で、波打ちが生じていることが確認できる。

(c) $\omega=4\pi\cdot 50$ rad/s のとき $\omega=4\pi\cdot 1$ rad/s のときと同様に、パラメータ振動は発生していないことがいえる。また、 ω が大きいことによって、小刻みかつ微量にしか変化しないため、(b)のときのような波打ちが発生しないことが確認できる。

これらのことから、 $\omega_0 \div 2\omega$ のとき、Mathieu 方程式のパラメータ励振が発生することが確認できる。また、三次元周波数分析より、基本波は約 50Hz であり、発生した振動数が、系の固有振動

数に一致することも確認できる。

6. 実現象分析への適用の試み

ここでは、自動車の突起乗り越え時のばね下振動の時刻歴応答データを三次元周波数分析し、突起乗り越え時の振動数の変化について示す。また、モデル化の可能性を確認するために、Duffing 方程式に基づくシミュレーションを実施したことを報告する。

6・1 応答分析 図 6(a)の時刻歴応答波形を三次元周波数分析した結果を図 6(b)に示す。30Hz 付近のピーク振動数が振動発生時から徐々に高い振動数へと変化していることが読み取れる。また、20Hz 付近では乗り越え前後でも観察され、平地での路面からの強制振動成分と考えられる。

6・2 Duffing 方程式によるシミュレーション 図 6(b)より、振動発生時に振動数の変化が見られた。これは第 3 章で検討した Duffing 方程式の応答挙動と似たものと思われる。そこで、現象のモデル化に先立ち、Duffing 方程式を用いて、瞬間的に力が作用し

(a)Time response in case of $\omega=4\pi\cdot 50$ rad/s

(b)Time-frequency analysis result in case of $\omega=4\pi\cdot 50$ rad/s (dB scale)

(a)Time response in case of $\omega=4\pi\cdot 1$ rad/s

(b)Time-frequency analysis result in case of $\omega=4\pi\cdot 1$ rad/s (dB scale)

(a)Time response in case of $\omega=4\pi\cdot 100$ rad/s

(b)Time-frequency analysis result in case of $\omega=4\pi\cdot 100$ rad/s (dB scale)

Fig.5 Analysis result of Mathieu's equation in three cases of ω

Fig.6 Responses of the automotive vehicle running over a bump

た場合についてシミュレーションを行った。Duffing 方程式は式(2)であり、 $\omega_n = 2\pi \cdot 25 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.1$, $\beta = -50$, $f = 40 \sin(2\pi \cdot 20t) \text{ N/kg}$ とし、過渡的な励振を模擬するために時刻 0.58 秒から 0.02 秒間 1000N の力を作用させた。そのときの時刻歴加速度応答波形を図 6(c)に、その三次元周波数分析結果を同図(d)に示す。

Duffing 方程式での各種パラメータなどの設定には更なる検討は必要であるものの、図 6(b)と概ね同様な傾向にあると思われる。

以上のように、三次元周波数分析結果を利用し、各種微分方程式の応答の特徴と比較を行い、実現象と似た特徴を有する微分方程式で現象のモデル化を行うことの手ごたえを得ることができたと言える。

7. おわりに

デジタルフィルタを用いた三次元周波数分析技術を、過渡応答および各種非線形現象の分析技術として確立するために、本報では、以下の知見を得た。

- 1) 線形振動応答の三次元周波数分析を行った。
- 2) Duffing 方程式の応答の三次元周波数分析を行い、初期条件による振動数の変化、高調波成分の出現を確認できることを示した。
- 3) また Van der Pol 方程式の応答の三次元周波数分析により、非線形パラメータが大きくなるにつれて高調波成分が顕著となることを確認できることを示した。
- 4) また Mathieu 方程式の応答の三次元周波数分析により、 $\omega_0 \approx 2\omega$ のとき、パラメータ励振が発生することと、発生した振動数が、系の固有振動数に一致することも確認した。
- 5) 三次元周波数分析を自動車の突起乗り越え時の時刻歴応答データの分析に利用し、振動数が変化することを確認した。

- 6) 突起乗り越え時の振動応答のモデルとして、Duffing 方程式を考え、数値シミュレーションを実施し、モデル化への利用の手ごたえを得た。

文 献

- (1) 中野, ウェーブレットによる信号処理と画像処理, 共立出版, 1999
- (2) 谷萩, デジタルフィルタと信号処理, コロナ社, 2001
- (3) 中村, デジタルフィルタ, 東京電機大学出版局, 1989
- (4) 菅原, 山崎, 過渡応答のデジタルフィルタを用いた周波数分析手法, 日本機械学会 2008 年度年次大会講演論文集, No.08-1, pp141-142, 2008
- (5) 安田, 振動工学応用編, コロナ社, 2001
- (6) 小林, 振動学, 丸善株式会社, 1994
- (7) 一宮, 機械系の音響工学, コロナ社, 1992