305 IDA-PBCによる倒立振り型移動体の安定化制御

Stabilization of a Mobile Inverted Pendulum with IDA-PBC

○正 横山 和人 (慶應大) 正 高橋 正樹 (慶應大)

Kazuto YOKOYAMA, Keio University, 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama
Masaki TAKAHASHI, Keio University, 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama

Mobile inverted pendulums are expected to be applied to personal mobility and robots which is used in near human living space. Although this mobility always need to be stabilized, main approaches to control it has been methods based on a linearized model or feedback linearization. In this study, interconnection and damping assignment passivity-based control (IDA-PBC) is applied and a nonlinear controller is constructed. Usable methods to select controller parameters and estimate the domain of attraction are also introduced. Simulation results showed that the IDA-PBC controller performs fast responses theoretically ensuring sufficient domain of attraction.

Key Words : Mobile Inverted Pendulum, Passivity, Nonlinear Control, Domain of Attraction, Controller Parameter

A 1. はじめに

倒立振り型移動体は旋回性や省スペース性から、人間の生活空間に近い環境で運用するロボットやパーソナルモビリティへの応用が期待される。このシステムは信頼性の高い姿勢安定化制御が要求されるが、従来研究では線形近似モデルやフィードバック線形化を用いる手法が主流であった。本研究ではこれらを用いない非線形制御による姿勢安定化を目的とし、劣駆動機械システムに対して有効性が示されている制御手法である Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control (IDA-PBC) を適用する。制御対象のモデルは図A1に示すように、運動を前後方向に限定したものをを用いる。IDA-PBC制御器導出は偏微分方程式 (PDE: Partial Differential Equation) の可解性に依存し、これを解くことは一般的に困難とされる。従来研究でPDEを手続き的に解く方法が提案され台車型倒立振りなどへ適用されているが、倒立振り型移動体は必要な前提条件を満たさない。そこで本研究では直接的にPDEを解き制御器を導出できることを示す。また制御性能を考慮しつつ安定性を保証する制御器パラメータの選定作業は煩雑となる。本研究ではその条件を満たすパラメータ集合を明らかにし、引き込み領域も事前に容易に推定できる見通しの良い設計法を示す。以上に基づき設計したIDA-PBC制御器の有効性をシミュレーションにより検証する。

A 2. IDA-PBC制御器導出と安定性保証条件の可視化

PDEを直接的に解くことでIDA-PBC制御器を導出し、安定性を保証するための条件を数式展開により明確化し、制御器パラメータ集合は図A2に示す灰色の2次元領域となることを示した。これにより見通しの良いパラメータ選択が可能になるとともに、これを利用して事前に容易に引き込み領域を推定可能であることを示した。

A 3. シミュレーションによる制御性能検証

図A3に初期条件として 0.1 rad の姿勢角を与えたときの応答を示す。IDA-PBCは応答が遅くなる傾向があると報告されていたが、著者らの台車型倒立振りを対象とした従来研究の知見をパラメータ選択時に考慮することで引き込み領域とのトレードオフをある程度許容しつつ良好な速応性が得られた。また提案した設計法に基づき、このときの引き込み領域は $q_1 \in (-0.618, 0.618)$ rad と算出された。

A 4. まとめ

倒立振り型移動体に対してIDA-PBCを適用し、PDEを直接的に解き、線形近似モデルやフィードバック線形化を用いない非線形安定化制御器を構築した。安定性を保証する制御器パラメータ集合は2次元領域となることを示した。これによりパラメータ選択の見通しが良くなり、引き込み領域も事前に容易に推定可能であることを示した。制御器の性能をシミュレーションにより検証し、ある程度の広さの引き込み領域を理論的に保証しつつも良好な速応性を得た。

Fig. A1 Mobile inverted pendulum

Fig. A2 A region of parameters which guarantee stability

Fig. A3 Response of body angle

1. はじめに

倒立振子型移動体は旋回性や省スペース性から、人間の生活空間に近い環境で運用する移動ロボットやパーソナルモビリティへの応用が期待される。このシステムは運用の前提として倒立状態の維持が要求されるが、これには信頼性の高い姿勢安定化制御が必要である。しかし従来研究では主に線形近似モデルやフィードバック線形化に基づく手法が提案されてきた⁽¹⁾⁻⁽³⁾。

本研究は倒立振子型移動体に対して線形近似モデルやフィードバック線形化を用いない安定化制御系設計を目指す。具体的には劣駆動機械システムに対して有効性が示されている非線形制御手法である Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control (IDA-PBC)⁽⁴⁾⁻⁽⁹⁾ に着目する。IDA-PBCはシステムのPort-Controlled Hamiltonian (PCH) 構造⁽¹⁰⁾を保存しつつ全エネルギーを整形し、PCHシステムがもつ受動性を利用して安定化を実現する非線形制御手法である。従来研究においてIDA-PBCは強力な安定化制御性能を有する一方、収束は緩やかになる傾向が報告されていた⁽⁵⁾⁻⁽⁹⁾。しかし著者らは台車型倒立振子を対象とし、引き込み領域とのトレードオフにより速応性が改善される知見を示した⁽¹¹⁾。これに基づき、倒立振子型移動体に対しても十分な引き込み領域を理論的に保証しつつ、良好な制御性能を有するIDA-PBC制御器の設計が期待できる。また本制御手法は受動性を利用することから、モデル化されていない不確かさなどに対するロバスト性も期待できる⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾。

以上の背景より、本研究では倒立振子型移動体の安定化制御にIDA-PBCを適用する。制御器導出は偏微分方程式(PDE: Partial Differential Equation)の可解性に依存するが、一般的にこれを解くことは困難とされる。AcostaらによりPDEを手続き的に解く方法が示され⁽⁷⁾、台車型倒立振子などへ適用されている^{(7), (11)}が、本制御対象は後述するように前提条件を満たさない。そこで本研究ではPDEを直接的に解くことで制御器が導出可能であることを示す。また制御器が安定性を保証する条件は、ある2次元領域からの設計パラメータ選択に帰着できることを示し、設計の見通しを良くする方法を示す。さらにこれを利用することで引き込み領域を事前に容易に推定可能であることを示す。最後にシミュレーションにより、設計した制御器の有効性を検証する。

2. 倒立振子型移動体のモデル化

運動を前後方向のみに限定し、2次元平面内で考えた倒立振子型移動体モデルを図1に示す。 q_1 を車体の姿勢角、 q_2 を車体を基準とした相対的な車輪の回転角とする。 $\mathbf{q}=[q_1, q_2]^T$ を一般化座標、 g を重力加速度として運動方程式は次式となる。ただし制御系設計時に摩擦や滑りは考慮しない。計算の簡単化のため、慣性行列 $\mathbf{M}$ の2行2列成分が1となるように全体を割っている。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_s + \mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

各成分は次のようになる。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2a\cos(q_1) + b & a\cos(q_1) + c \\ a\cos(q_1) + c & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} -a\sin q_1 \cdot \dot{q}_1^2 \\ -a\sin q_1 \cdot \dot{q}_1^2 + f_r q_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Fig. 1 Mobile inverted pendulum

$$\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} -e\sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$d = (M + m_h + m_w)r^2 + J_w + i^2 J_m \quad (5)$$

$$a = \frac{1}{d}(Ml + m_h l_h)r \quad (6)$$

$$b = \frac{1}{d}\{(M + m_h + m_w)r^2 + Ml^2 + m_h l_h^2 + J + J_w\} \quad (7)$$

$$c = \frac{1}{d}\{(M + m_h + m_w)r^2 + J_w\} \quad (8)$$

$$e = \frac{g}{d}(Ml + m_h l_h) \quad (9)$$

$$u = \frac{\tau}{d} \quad (10)$$

このときシステムのポテンシャルエネルギー V は次式となる。

$$V(q_1) = e \cos(q_1) \quad (11)$$

3. IDA-PBCの定式化

本章では劣駆動機械システムに対するIDA-PBCの定式化、および対象が特定の仮定を満たす場合にPDEを簡単化する方法について述べる^{(5), (6)}。

3・1 PDEの導出 劣駆動機械システムに対するIDA-PBCは次のようなPCHシステムを対象とする。ただし摩擦は考慮しない。

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (12)$$

ここで $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ は一般化運動量、 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ は入力トルク、 $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は単位行列、劣駆動システムであることから $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ は $\text{rank}(\mathbf{G}) = m < n$ であるベクトルである。

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) \quad (13)$$

は開ループシステムの全エネルギーを表す。

次のPDEを満たす閉ループ慣性行列 $\mathbf{M}_d$ およびポテンシャルエネルギー V_d をもつシステムを考える。

$$\mathbf{G}^\perp \left\{ \nabla_{\mathbf{q}} (\mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}) - \mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} (\mathbf{p}^T \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{p}) + 2\mathbf{J}_2 \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{p} \right\} = \mathbf{0} \quad (14)$$

$$\mathbf{G}^\perp \{ \nabla_q V - \mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1} \nabla_q V_d \} = \mathbf{0} \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

ここで $\mathbf{J}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{G}^\perp \in \mathbb{R}^{m \times n}$ は $\mathbf{G}^\perp \mathbf{G} = \mathbf{0}$ を満たすベクトルで, $\text{rank}(\mathbf{G}^\perp) = n - m$ である.

IDA-PBC は 2 種類の制御入力から構成され, 1 つはシステムの全エネルギーを整形する入力 $\mathbf{u}_{es}$, もう 1 つは漸近安定性を得るために付加する減衰に相当する入力 $\mathbf{u}_{di}$ である.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{es} + \mathbf{u}_{di} \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

全エネルギー整形のための入力は

$$\mathbf{u}_{es} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G} (\nabla_q H - \mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1} \nabla_q H_d + \mathbf{J}_2 \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{p}) \quad (17)$$

で表現され, 開ループ PCH システムを次の閉ループ PCH システムへと変換する.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_d \\ -\mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

H_d は閉ループシステムの全エネルギー

$$H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V_d(\mathbf{q}) \quad \cdots \cdots \cdots (19)$$

である. $\mathbf{M}_d$ が $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ 近傍で正定かつ

$$\mathbf{q}^* = \arg \min V_d(\mathbf{q}) \quad \cdots \cdots \cdots (20)$$

となるとき, $(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ は H_d をリアプノフ関数として閉ループシステムの安定平衡点となる.

加えて, 正定対称行列 $\mathbf{K}_d$ を用いた負のフィードバック

$$\mathbf{u}_{di} = -\mathbf{K}_d \mathbf{G}^T \nabla_p H_d \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

を考える. これにより H_d の時間微分値は

$$\dot{H}_d \leq -\lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_d \} \left| (\nabla_p H_d)^T \mathbf{G} \right|^2 \leq 0 \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

となる. $\lambda_{\min}$ は最小の固有値を表す. さらにシステムが零状態可検出性を満たすことで $(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ は漸近安定となる.

推定引き込み領域は,

$$\Omega_W = \{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) < W \} \quad \cdots \cdots \cdots (23)$$

$$\bar{W} \triangleq \sup \{ W > H_d(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) \mid \Omega_W \text{ is bounded} \} \quad \cdots \cdots \cdots (24)$$

としたとき, $\Omega_{\bar{W}}$ で表される.

3・2 PDEの簡単化 IDA-PBC制御器を導出するためにはPDEを $\mathbf{M}_d$ と V_d に関して解き, かつ $\mathbf{M}_d$ は正定でなければならない. この作業は一般的に困難であり, IDA-PBC適用時の障壁となる. ある条件を満たす劣駆動システムに対しては, この解を手続き的に得る有効な方法がAcostaらにより示されている⁽⁷⁾. 台車型倒立振子への適用時には, フィードバックによる部分線形化⁽¹⁵⁾により条件を満たすシステムへ変換可能である. しかし倒立振子型移動体はこの条件を満たさず, 部分線形化を用いても運動方程式 (1) 中の

$\mathbf{C}_s$ の第1成分の影響により条件を満たさないことが確認できる. よってAcostaらによる手法を用いることはできない.

本研究ではGómez-Esternら⁽⁵⁾ とOrtegaら⁽⁶⁾ により示された, あるクラスのシステムに対してPDEを簡単化する手法を利用する. この手法は手続き的に解を求めるものではないが, 本研究では簡単化されたPDEを解いてIDA-PBC制御器が導出可能であることを示す.

PDEを簡単化するための仮定は次の3つである.

$$(\text{仮定 1}) \quad m = n - 1 \quad \cdots \cdots \cdots (25)$$

この場合, $\mathbf{G}^\perp$ は次式となる.

$$\mathbf{G}^\perp = \mathbf{e}_k^T \quad \cdots \cdots \cdots (26)$$

k を劣駆動座標に対応する添字である.

(仮定 2) $\mathbf{M}$ は劣駆動座標のみに依存する.

(仮定 3) $\mathbf{M}_d$ は劣駆動座標のみに依存する.

これらの条件を満たすことで, 運動エネルギーに関するPDE は次の常微分方程式 (ODE: Ordinary Differential Equation) へと簡単化できる.

$$\frac{d}{dq_k} (\mathbf{M}_d)_{(i,k)} = - \frac{1}{(\mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1})_{(k,k)}} \left(\mathbf{M}_d \frac{d}{dq_k} (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{M}_d \right)_{(i,k)} \quad (27)$$

4. IDA-PBC制御器導出

4・1 運動エネルギーに関する PDE 解 本制御対象においては $n=2$, $m=1$ である. また q_1 が劣駆動座標に対応し, $k=1$ である. 仮定 1 と 2 は満たされ $\mathbf{G}^\perp$ は次式となる.

$$\mathbf{G}^\perp = [1 \quad 0] \quad \cdots \cdots \cdots (28)$$

仮定 3 を考慮し, $\mathbf{M}_d$ を次のようにおく.

$$\mathbf{M}_d(q_1) = \begin{bmatrix} m_{d1}(q_1) & m_{d2}(q_1) \\ m_{d2}(q_1) & m_{d3}(q_1) \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (29)$$

以上より, IDA-PBC 制御器導出のために解くべき PDE は式 (30), (34) となる.

$$\frac{dm_{d1}}{dq_1} = \frac{2a \{ (-a \cos q_1 - c + 1)m_{d1} + (a \cos q_1 + b - c)m_{d2} \}}{a^2 \cos^2 q_1 + 2a(c-1) \cos q_1 + c^2 - b} \sin q_1 \quad \cdots \cdots \cdots (30)$$

これらの ODE は台車型倒立振子を対象とした研究⁽⁵⁾と類似した構造であることに着目し, 次のように m_{d2} と m_{d3} をおく.

$$m_{d2}(q_1) = \alpha_2(q_1) m_{d1}(q_1) \quad \cdots \cdots \cdots (31)$$

$$m_{d3}(q_1) = \alpha_3(q_1) m_{d1}(q_1) \quad \cdots \cdots \cdots (32)$$

式 (30) は

$$\frac{dm_{d1}}{dq_1} = \frac{2a \{ \alpha_2(a \cos q_1 + b - c) - a \cos q_1 - c + 1 \}}{a^2 \cos^2 q_1 + 2a(c-1) \cos q_1 + c^2 - b} \sin q_1 \cdot m_{d1} \quad \cdots \cdots \cdots (33)$$

となり, $F(q_1)$ が積分可能であれば解は次式として求まる.

$$\frac{dm_{d2}}{dq_1} = \frac{a \{ 2(a \cos q_1 + c - 1)m_{d1}m_{d2} + (-a^2 \cos^2 q_1 - 2ac \cos q_1 - c^2 + 2c - b)(m_{d1}m_{d3} + m_{d2}^2) + (2a^2 \cos^2 q_1 + 2ab \cos q_1 - 2c^2 + 2bc)m_{d2}m_{d3} \}}{a^2 \cos^2 q_1 + 2a(c-1) \cos q_1 + c^2 - b} \sin q_1 \quad \cdots \cdots \cdots (34)$$

$$m_{d1}(q_1) = K_m e^{\int_{q_1}^a F(\mu) d\mu} \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで $K_m > 0$ は定数であり

$$F(q_1) = \frac{2a\{\alpha_2(a\cos q_1 + b - c) - a\cos q_1 - c + 1\}}{a^2 \cos^2 q_1 + 2a(c-1)\cos q_1 + c^2 - b} \sin q_1 \quad (36)$$

である。また q_1^* は所望の平衡点を表す。

適切な α_2 を設定することにより m_{d2} を決定すると、それに伴い式 (34) より m_{d3} が決定される。ゆえに $\mathbf{M}_d$ の正定性や他の条件を満たすように α_2 を決定しなければならない。

4・2 ポテンシャルエネルギーに関する PDE 解 式 (15) は次の形へと計算できる。

$$(\mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1})_{(1,1)} \frac{\partial V_d}{\partial q_1} + (\mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1})_{(1,2)} \frac{\partial V_d}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_1} \quad \dots\dots\dots (37)$$

下付き添字 (i, j) を付したものは、その行列やベクトルの i 行 j 列成分を表す。この PDE の解は次の形で得られる。

$$V_d(\mathbf{q}) = \int_0^{q_1} \frac{1}{(\mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1})_{(1,1)}(\mu)} \frac{\partial V}{\partial q_1}(\mu) d\mu + \Phi(z(\mathbf{q})) \quad (38)$$

ここで z を次式とする。

$$z(\mathbf{q}) \triangleq q_2 - \int_0^{q_1} \frac{(\mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1})_{(1,2)}(\mu)}{(\mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1})_{(1,1)}(\mu)} d\mu \quad \dots\dots\dots (39)$$

Φ は任意の微分可能な関数である。

4・3 安定性保証条件の定式化 以上を踏まえ、 α_2 の具体的な形などを決定していくことで IDA-PBC 制御器が得られる。しかし上述の各種条件が満たされつつ、応答の良いパラメータを選択する作業は煩雑である。ここでは設計の見通しを良くするため、安定性が保証されるための条件を明確化する。最終的に条件を満たすパラメータ集合は 2 次元領域で表すことが可能であることを示す。また引き込み領域も事前に容易に推定可能であることを述べる。

閉ループ慣性行列に関する条件を考える。 $\mathbf{M}_d$ は正定でなければならないことから、 $m_{d1} > 0$ を考慮すると条件は

$$\det(\mathbf{M}_d(q_1^*)) > 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

である。計算を進めると次のように表せる。

$$\alpha_3(q_1^*) - \alpha_2^2(q_1^*) > 0 \quad \dots\dots\dots (41)$$

α_3 は α_2 の設定に依存して決まることから、この条件は実質的に α_2 のみに依存する。次に閉ループポテンシャルエネルギーに関する条件を考える。 V_d が満たすべき式 (20) は次の 2 つの条件で表現できる。

$$\nabla_{\mathbf{q}} V_d(\mathbf{q}^*) = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$\nabla_{\mathbf{q}}^2 V_d(\mathbf{q}^*) > 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

第 2 の条件は次のように書き直すことができる。

$$\nabla_{\mathbf{q}}^2 \Phi(\mathbf{q}^*) > 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$\frac{\partial^2 V_{d1}(q_1^*)}{\partial^2 q_1} > 0 \quad \dots\dots\dots (45)$$

ここで式 (38) の第 1 項を $V_{d1}(q_1)$ とおいた。式 (42), (44) は Φ を次のように設定することで満たされることが示されている⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾。

$$\Phi(z(\mathbf{q})) = \frac{P}{2} \{z(\mathbf{q}) - z(\mathbf{q}^*)\}^2 \quad \dots\dots\dots (46)$$

$P > 0$ は定数である。

条件式 (42) については、 $\partial V / \partial q_1 = -e \sin(q_1)$ および式 (46) より $q_1^* = 0$ において常に成立する。

ゆえに式 (45) のみを考えれば良い。計算を進めるとこの条件は次式に簡単化できる。

$$\frac{1}{(\mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1})_{(1,1)}} < 0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

このとき $m_{d1}(q_1) > 0$ および $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ において

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 q_1}(q_1) = -e \cos q_1 < 0 \quad \dots\dots\dots (48)$$

であることを用いた。結局 V_d に関する条件は $\det(\mathbf{M}) > 0$ を考慮して次の不等式で表される。

$$\alpha_2(q_1^*) > \frac{1}{a \cos q_1^* + c} > 0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

この不等式条件の見通しを良くするため α_2 を

$$\alpha_2(q_1) = \frac{1}{\beta_1 \cos(q_1) + \beta_2} \quad \dots\dots\dots (50)$$

とおく。ここで β_1, β_2 は定数である。式 (49) は次の 2 つの条件で書き直すことができる。

$$\beta_2 < -\cos q_1^* \cdot \beta_1 + a \cos q_1^* + c \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$\beta_2 > -\cos q_1^* \cdot \beta_1 \quad \dots\dots\dots (52)$$

ゆえに、IDA-PBC 制御器が安定性を保証するか否かは β_1, β_2 の設定で決まる。

4・4 安定性保証パラメータの領域表示 α_2 の具体的な形を決定したことから、残る条件である式 (41) を考える。これを計算すると $d\alpha_2/dq_1$ が共通項として括り出せることから、条件式は次式となる。

$$\begin{cases} C(\beta_1, \beta_2) < 0 & (\beta_1 > 0) \\ C(\beta_1, \beta_2) > 0 & (\beta_1 < 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (53)$$

ここで C は次式である。

$$C(\beta_1, \beta_2) = \{\alpha_3(q_1^*) - \alpha_2^2(q_1^*)\} \left(\frac{d\alpha_2}{dq_1}(q_1^*) \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (54)$$

次にこれを具体的に示す不等式を示すが、不等号の方向はシステムのパラメータにより変化する。本研究ではシステムのパラメータを Table 1 のように設定する。これは実機実験を想定したものとしている。Table 1 のパラメータを用いるとき、式 (53) は次の条件となる。

$$\beta_1 < 0 \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$\beta_2 < -\cos q_1^* \cdot \beta_1 + a \cos q_1^* + c \quad \dots\dots\dots (56)$$

$$\beta_2 < -\cos q_1^* \cdot \beta_1 + \frac{2\{a \cos q_1^* (a \cos q_1^* + b) + c(b - c)\}}{(a \cos q_1^* + c)^2 + (b - 2c)} \quad (57)$$

式 (57) 右辺第2項の分母成分は0ではないことを仮定しているが、本研究では $q_1^* \in (-\pi/2, \pi/2)$ において0にはならない。

以上の条件を統合することで、安定性を保証するパラメータ集合は β_1 - β_2 平面に領域表示が可能となる。ここで式 (51), (52), (55), (57) において、不等号を等号としたときに表される直線をそれぞれ T_1 , T_2 , T_3 , T_4 とする。なお式 (51), (56) は等価でまとめて考えることができる。

$q_1^* = 0$ としたときの領域を図2の灰色の部分で示す。この領域内から点 (β_1, β_2) を選択する限り、IDA-PBC制御器は少なくとも倒立状態近傍での安定性を保証する。

4・5 引き込み領域の推定 上記の領域表示を利用して、引き込み領域の推定方法を示す。前項では少なくとも倒立状態近傍での安定性のみを保証する (β_1, β_2) を明らかにしたが、それは条件を $q_1^* = 0$ に固定して評価したこと起因する。ここで q_1^* を q_{1e} におき換え、 q_{1e} を固定せず考える。引き込み領域拡大のためには、 $q_1^* = q_{1e} = 0$ における条件を満たした上で、式 (41), (47) ができるだけ広い q_{1e} に対して成立し、有界であればよい。 q_{1e} を0から $\pi/2$ まで徐々に大きくすると、灰色の領域は図3のように変化する。 $q_{1e} = 0$ に対応する図2の領域内から選択した点 (β_1, β_2) が、変化後の領域にも境界線上を除いて含まれれば、そのときの q_{1e} は引き込み領域内にあるといえる。なお Table 1 に示すパラメータを用いた場合、 $q_{1e} \in (-\pi/2, \pi/2)$ において T_4 は T_1 よりも常に上に位置することが計算により確認できる。よって本研究においては T_1 のみを考慮すれば良い。以上より、本研究において引き込み領域は次の手順で推定できる。

Table 1 Parameters of the mobile inverted pendulum

Parameter	Unit	Value
M	kg	2.3
m_w	kg	0.63
m_h	kg	1.0
l	m	0.061
l_h	m	0.50
r	m	0.075
J	kg・m ²	1.9×10^{-2}
J_w	kg・m ²	1.8×10^{-3}
J_m	kg・m ²	2.1×10^{-6}
i	-	50
f_r	N・m・s/rad	0

Table 2 Parameters of the IDA-PBC controller

Parameter	Value	Parameter	Value
K_m	50	β_1	-2.5
P	0.45	β_2	4.2
K_d	60		

1. 図2に示す領域から点 (β_1, β_2) を選択する
2. T_1 が選択点を通過するときの $q_{1e} = q_{1lim} > 0$ を求める
3. 推定引き込み領域は $q_1 \in (-q_{1lim}, q_{1lim})$ となる

定性的には図3に示すように、 $q_{1e} = 0$ に対応する灰色の領域の右下ほど引き込み領域は広く、左上ほど狭くなる。

4・6 制御入力の導出と漸近安定性 算出した M_d と V_d を用い、式 (14) より J_2 を計算することで、式 (16) の IDA-PBC制御入力が求まる。式 (35), (38), (39) 中の積分計算は解析的に求めることが困難であることから数値的に行う。なお、式 (35) を導出する際に $F(q_1)$ は積分可能であることを仮定した。本研究では $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ で $F(q_1)$ は有界であることが確認でき、積分計算可能である。また $\dot{H}_d = 0 \Rightarrow (q, p) \equiv (q^*, 0)$ となることから、LaSalle の不変性原理により所望の平衡点の漸近安定性が保証される。

5. シミュレーション

導出したIDA-PBC制御器を用いてシミュレーションを行い、性能を検証する。重力加速度の値は $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ とする。初期値を $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0.1, 0, 0, 0)$ とし、目標水平移動距離位置を 0 m としたときの車体姿勢角と車輪水平移動距離の応答を図4, 5に示す。倒立振り子型移動体は安定化されるとともに速応性も良好である。閉ループシステムの全エネルギーの履歴を図6に示す。 H_d は常に正值かつ単調非増加であり、理論通りリアプノフ関数の役割を果たしている。

Table 2 のパラメータは試行錯誤的に決定している。ただし、著者らが過去の研究で示した知見⁽¹⁾と同様に、本制御対象においても引き込み領域の大きさと速応性にはトレードオフ関係が存在したため、設計の際に考慮した。

Fig. 2 A region of parameters which guarantee stability

Fig. 3 A Relation between the domain of attraction and regions of parameters

Fig. 4 Body angle

Fig. 5 Wheel displacement

Fig. 6 Energy of closed-loop PCH system

Fig. 7 Angle (from $q_1 = 0.617$ [rad])

4・6 節で示した手順に基づき推定引き込み領域を算出すると $q_{lim} = 0.618$ rad であった。選択した点 (β_1, β_2) のプロットと、このときの引き込み領域に対応する T_1 を図2に破線で示す。図6に初期値を引き込み領域の端点に近い $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0.617, 0, 0, 0)$ としたときの車体姿勢角履歴を示す。オーバーシュートが大きいのが、理論的予測通り安定化は達成されている。なお初期姿勢角を $q_1 = 0.618$ rad とすると、応答はシミュレーション開始直後に発散した。

6. まとめ

倒立振り子型移動体を対象とし受動性に基づく制御手法の1つであるIDA-PBCを適用した。制御器導出はPDEの可解性に依存するが、本制御対象において解くことが可能であることを示した。これにより、線形近似モデルやフィードバック線形化を用いない非線形制御器を得た。制御器が安定性を保証する条件は、2次元領域からの設計パラメータ選択に帰着できることを示し、設計の見通しを良くする手法を示した。また引き込み領域は事前に容易に推定可能であることを示した。シミュレーションにより制御性能を検証し、ある程度広い引き込み領域を理論的に保証しつつも、速応性の良い応答が得られた。

謝 辞

本研究の一部は文部科学省グローバルCOEプログラム「環境共生・安全システムデザインの先導拠点」によるものであることを記し、謝意を表す。

文 献

- (1) F. Grasser, A. D'Arrigo, S. Colombi, and A. C. Rufer, JOE: A Mobile, Inverted Pendulum, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 49, No. 1 (2002), pp. 107-114.
- (2) 畠山, 島田, Zero Dynamics を利用した倒立振り子型二輪ロボットの拘束移動制御, 計測自動制御学会論文集, Vol. 44, No. 3 (2008), pp. 252-259.
- (3) K. Pathak, J. Franch, and S. K. Agrawal, Velocity and Position Control of a Wheeled Inverted Pendulum by Partial Feedback Linearization, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 21, No. 3 (2005), pp. 505-513.

- (4) R. Ortega, A. J. van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar, Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Port-Controlled Hamiltonian Systems, *Automatica*, Vol. 38, (2002), pp. 585-596.
- (5) F. Gómez-Estern, R. Ortega, F. Rubio, and J. Aracil, Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems via Total Energy Shaping, *IEEE Conference on Decision and Control*, (2001), pp. 1137-1143.
- (6) R. Ortega, M. W. Spong, F. Gómez-Estern, and G. Blankenstein, Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems via Interconnection and Damping Assignment, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 8 (2002), pp. 1218-1233.
- (7) J. Á. Acosta, R. Ortega, A. Astolfi, and A. D. Mahindrakar, Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Mechanical Systems with Underactuation Degree One, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 12 (2005), pp. 1936-1955.
- (8) R. Ortega and E. Garcia-Canseco, Interconnection and damping assignment passivity-based control: a survey, *European Journal of Control*, Vol. 10, (2004), pp. 432-450.
- (9) J. C. M. van der Burg, R. Ortega, J. M. A. Scherpen, J. Á. Acosta, and H. B. Siguerdidjane, An Experimental Application of Total Energy Shaping Control: Stabilization of the Inverted Pendulum on a Cart in the Presence of Friction, *European Control Conference*, (2007).
- (10) J. van der Schaft, *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Berlin, Germany: Springer, (1999).
- (11) Kazuto Yokoyama, and Masaki Takahashi, Stabilization of a Cart-Inverted Pendulum with Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control Focusing on the Kinetic Energy Shaping, *International Conference on Motion and Vibration Control*, (2010), (to be accepted).
- (12) 坂本, 藤本, 石川, 非線形制御—消す非線形から生かす非線形へ, 計測自動制御学会論文集, Vol. 33, No. 1 (1997), pp. 1-6.
- (13) 藤本, ハミルトニアンシステムの制御, 計測と制御, Vol. 39, No. 2 (2000), pp. 1-6.
- (14) R. Ortega, A. J. van der Schaft, I. Mareels, and B. Maschke, Putting Energy Back in Control, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 21, No. 2 (2001), pp. 18-33.
- (15) M. W. Spong, The Control of Underactuated Mechanical Systems, *First International Conference on Mechatronics*, (1994), pp. 26-29.