ANCF 法に基づくモデルを利用した柔軟マルチボディシステムの制御系設計法 (柔軟梁の位置および振動制御の例)

○正 菅原 佳城 (秋田大), 正 小林 信之 (青学大)

A Controller Design Method for Flexible Multibody System Which Is Expressed by ANCF (Location and Vibration Control of Flexible Beam)

Yoshiki SUGAWARA^{*1} and Nobuyuki KOBAYASHI^{*2}

^{*1}Akita Univ. Dept. of Mechanical Engineering
Gakuen-machi 1-1, Tegata, Akita-shi, Akita, 010-8502 Japan

^{*2}Aoyama Gakuin Univ. Dept. of Mechanical Engineering
Fuchinobe 5-10, Chuo-ku, Sagamihara-shi, Kanagawa-ken, 252-5258 Japan

Absolute Nodal Coordinate Formulation (ANCF) is a kind of finite element method for the flexible multibody system with large deformation and large rotation. There are few studies which extract controllers from the mathematical expressions derived by ANCF. The main aim of this study is to propose a controller design procedure by the use of the mathematical expression which is derived by ANCF. A flexible beam is introduced as a controlled object and the control torque is applied to the one end of the beam. Control objective is to rotate the beam to the desired position as well as suppress the residual vibration of the beam. In the proposed method, a kind of ANCF which uses continuum mechanics approach is employed. Some assumptions and manipulations of the mathematical expression by that ANCF result in a suitable expression for controller design based on μ -synthesis framework. The validity of the proposed method is demonstrated by numerical simulations.

Key Words : Absolute Nodal Coordinate Formulation, μ -synthesis, Flexible Multibody System

1. 緒 言

近年、軌道上において巨大な構造物を実現するために極めて柔軟な材料を用いた展開機構が採用されることがある。例えば、2010 年に打ち上げられソーラーセイル「IKAROS^①」は膜の対角線長さが 20[m]で厚さが 0.0075[mm]の構造を有しており、打ち上げ時にはロケットフェアリングの内部に折り畳んだ状態で搭載され、軌道上で展開された。また、観測ロケット実験「S310-36^②」では 1 辺が 10[m]以上もある三角形の網を直径 30[cm]程度のロケットフェアリングの中に搭載して打ち上げられ、軌道上での展開実験に成功している。一般的に、そのような極めて柔軟な巨大構造物の挙動を打ち上げ前の地上において実証実験をすることは非常に困難である。それゆえ、数多くの数値計算に関する研究がなされてきている。また、そのような柔軟巨大構造物の形状や姿勢は実用上の観点から極めて重要であり、それらを制御することが強く求められている。

絶対節点座標法 (ANCF) ^③は非増分型非線形有限要素法の一種であり、大変形を有するような柔軟マルチボディシステムの解析のために 10 年余り前に提案されて以降、様々な研究がなされてきている。ANCF では変形の座標と勾配が絶対座標を用いて表現され、その結果従来の有限要素法に比べて剛体運動を正確に表現できるという特徴を持つ。一方、ANCF は計算性が優れているとは言えず、時刻歴応答の計算は容易ではない。これは ANCF によって得られた運動方程式において、質量行列は定数行列となり慣性項は線形になるものの、剛性項に関しては極めて強い非線形性を示すからである。それゆえ、ANCF に基づいたモデルの時刻歴応答を計算する際は注意を要する。

ANCFに関する研究は非常に数多くなされてきている。例えば、3次元梁のANCFに基づいた表現法に関する研究⁽⁴⁾、数値解析結果と実験結果の比較によるANCFの手法に関する妥当性の検証⁽⁵⁾、効率的な計算を目的としたモデルの低次元化に関する研究⁽⁶⁾など様々である。しかしながら、ANCFに関する研究のほとんどすべては柔軟なマルチボディシステムの挙動の解析の能力を向上させることに集中しており、ANCFによって得られたモデルから制御系を設計するなどの研究は皆無であると言ってもよい。

本研究ではANCFに基づいて導出されたモデルから制御則を導出する手法の提案を行う。根元に制御トルクが印加できる柔軟な梁を制御対象として、その位置と振動の制御を行うことを試みる。本研究では制御系設計のためにANCFの一つである連続体力学に基づく定式化手法⁽⁷⁾に注目し、その手法によって得られる数学モデルに対して幾つかの仮定を設けた上で変形を施すとロバスト制御系設計の一つである μ 設計⁽⁸⁾の枠組みに適した表現になることを示す。

本論文は次のような構成である。まず第2章では制御対象が導入し、制御目的が定義される。その後制御系設計のための数学モデルを導出し、そのモデルを μ 設計に都合のよい形に変形を行い、最終的に μ 設計による制御則を導出する。3章では提案する制御系設計法の有効性を示すために、2章で導出した制御則に対し数値解析を行う。最後に、結論と今後の課題を4章において示す。

2. 制御系設計

Figure 1 Controlled object

Figure 2 The i -th element of mathematical expression for controller design

2.1 制御対象と制御目的

図1に示すように、本研究における制御対象は柔軟な梁から構成され、一端はピン支持、もう一端は自由端となっている。制御トルクはピン支持された一端の周りに印加される。制御目的は柔軟梁を任意の初期状態から希望の位置まで動かし、残留振動を抑制することである。

2.2 制御系設計のための数学モデル

以降では図1の柔軟梁を n_c 要素に分割し、それぞれの要素にL1-T1⁽⁷⁾モデルを適用することで、 μ 設計法への適した形の数学モデルを導出し制御系を設計する。

図2は i 番目($i=1,2,\dots,n_c$)の要素に対する節点座標の定義を表しており、節点座標は両節点の絶対座標における変位と勾配から構成されている。ここで $\bar{\cdot}$ は制御系設計のための数学モデルに関する記号であることを示しており、後述の数値解析のためのモデルと区別するために導入していることに注意されたい。

便宜上、初めに第1要素以外の要素の運動方程式を導出し、その後第1要素の運動方程式の導出を行う。

$\bar{e}_{ij}$ ($i=2,\dots,n_c, j=1,\dots,8$) を

$$\bar{e}_{i1} = \bar{X}_i \Big|_{\bar{x}_i=0}, \bar{e}_{i2} = \bar{Y}_i \Big|_{\bar{x}_i=0}, \bar{e}_{i3} = \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \bar{x}_i} \Big|_{\bar{x}_i=0}, \bar{e}_{i4} = \frac{\partial \bar{Y}_i}{\partial \bar{x}_i} \Big|_{\bar{x}_i=0}, \bar{e}_{i5} = \bar{X}_i \Big|_{\bar{x}_i=\bar{l}_i}, \bar{e}_{i6} = \bar{Y}_i \Big|_{\bar{x}_i=\bar{l}_i}, \bar{e}_{i7} = \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial \bar{x}_i} \Big|_{\bar{x}_i=\bar{l}_i}, \bar{e}_{i8} = \frac{\partial \bar{Y}_i}{\partial \bar{x}_i} \Big|_{\bar{x}_i=\bar{l}_i}$$

とし、節点ベクトルを

$$\bar{\mathbf{e}}_i = [\bar{\mathbf{e}}_{xi}^T \bar{\mathbf{e}}_{yi}^T]^T, \quad \bar{\mathbf{e}}_{xi} = [\bar{e}_{i1} \bar{e}_{i3} \bar{e}_{i5} \bar{e}_{i7}]^T, \quad \bar{\mathbf{e}}_{yi} = [\bar{e}_{i2} \bar{e}_{i4} \bar{e}_{i6} \bar{e}_{i8}]^T$$

とすると、第*i*要素上の任意の点について絶対座標で表現した位置ベクトルは

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \bar{\mathbf{S}}_i \bar{\mathbf{e}}_i \quad (1)$$

となる。ただし、

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{xi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}}_{yi} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}}_{xi} = \bar{\mathbf{S}}_{yi} = [1 - 3\bar{\xi}_i^2 + 2\bar{\xi}_i^3 \quad \bar{l}_i(\bar{\xi}_i - 2\bar{\xi}_i^2 + \bar{\xi}_i^3) \quad 3\bar{\xi}_i^2 - 2\bar{\xi}_i^3 \quad \bar{l}_i(\bar{\xi}_i^3 - \bar{\xi}_i^2)]$$

であり、 $\bar{l}_i$ を第*i*要素の無変形時の長さとして $\bar{\xi}_i = \bar{x}_i / \bar{l}_i$ と定義している。運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーおよび外力による仮想仕事を式(1)を用いて導出すると第*i*要素($i=2, \dots, n_c$)に対するL1-T1モデルによる運動方程式が

$$\bar{\mathbf{M}}_i \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{Ti} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\delta}(\bar{\mathbf{e}}_i) \bar{\mathbf{K}}_{Li} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \quad (2)$$

として与えられる。ただし、 $\bar{\mathbf{M}}_i$ は第*i*要素の慣性行列であり定数行列、 $\bar{\mathbf{K}}_{Ti}$ は曲げ変形に関する剛性行列であり定数行列、 $\bar{\delta}(\bar{\mathbf{e}}_i) \bar{\mathbf{K}}_{Li}$ は軸変形に対する剛性行列であり節点座標の関数となっている。また、 $\bar{\mathbf{M}}_i$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{Ti}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{Li}$ および $\bar{\delta}(\bar{\mathbf{e}}_i)$ は次のような形で表現される。

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \text{blockdiag}(\bar{\mathbf{M}}_{xi}, \bar{\mathbf{M}}_{yi}) \quad (3)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Ti} = \text{blockdiag}(\bar{\mathbf{K}}_{Txi}, \bar{\mathbf{K}}_{Tyi}) \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Li} = \text{blockdiag}(\bar{\mathbf{K}}_{Lxi}, \bar{\mathbf{K}}_{Lyi}) \quad (5)$$

$$\bar{\delta}(\bar{\mathbf{e}}_i) = \frac{\bar{d}_i - \bar{l}_i}{\bar{l}_i} \quad (6)$$

ただし、 $\bar{d}_i = \sqrt{(\bar{e}_{i5} - \bar{e}_{i1})^2 + (\bar{e}_{i6} - \bar{e}_{i2})^2}$ であり、 $\bar{\mathbf{M}}_{xi}$ 、 $\bar{\mathbf{M}}_{yi}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{Txi}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{Tyi}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{Lxi}$ および $\bar{\mathbf{K}}_{Lyi}$ の詳細については紙面の制限から省略する。ここで、制御対象の軸変形は曲げ変形に対して十分に小さいと仮定すると、 $\bar{d}_i$ は次の範囲

$$\bar{\alpha}_i \bar{l}_i \leq \bar{d}_i \leq \bar{l}_i \quad (7)$$

を取るとみなすことができる。ただし、 $\bar{\alpha}_i$ は第*i*要素の収縮率を表し $0 \leq \bar{\alpha}_i \leq 1$ を満たす。式(7)を式(6)で定義される $\bar{\delta}(\bar{\mathbf{e}}_i)$ に適用すると

$$\bar{\alpha}_i - 1 \leq \bar{\delta}(\bar{\mathbf{e}}_i) \leq 0$$

が得られる。式(7)を考慮すると、式(2)は次の形で表現される。

$$\bar{\mathbf{M}}_i \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + (\bar{\mathbf{K}}_{Ti} + \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{Li}) \bar{\mathbf{e}}_i - \bar{\Delta}_i \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{Li} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \quad (8)$$

ただし, $\bar{\beta}_i = (\bar{\alpha}_i - 1)/2$ であり $|\bar{\Delta}_i| < 1$ である. 式 (3), (4) および (5) から明らかなように, 式 (8) は次のように X 方向と Y 方向の二つの表現に分解することが可能である.

$$\bar{\mathbf{M}}_{X_i} \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + (\bar{\mathbf{K}}_{TX_i} + \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{LX_i}) \bar{\mathbf{e}}_i - \bar{\Delta}_i \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{LX_i} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{Y_i} \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + (\bar{\mathbf{K}}_{TY_i} + \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{LY_i}) \bar{\mathbf{e}}_i - \bar{\Delta}_i \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{LY_i} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \quad (10)$$

前述の第 1 要素以外の運動方程式の導出過程を第 1 要素へ適用し, さらに境界条件を考慮すると, 第 1 要素に対する運動方程式は

$$\bar{\mathbf{M}}_1 \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_1 + (\bar{\mathbf{K}}_{T1} + \bar{\beta}_1 \bar{\mathbf{K}}_{L1}) \bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\Delta}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\mathbf{K}}_{L1} \bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{Q}_1 \quad (11)$$

となる. ただし,

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = [\bar{\mathbf{e}}_{X1}^T \ \bar{\mathbf{e}}_{Y1}^T]^T, \quad \bar{\mathbf{e}}_{X1} = [\bar{e}_{13} \ \bar{e}_{15} \ \bar{e}_{17}]^T, \quad \bar{\mathbf{e}}_{Y1} = [\bar{e}_{14} \ \bar{e}_{16} \ \bar{e}_{18}]^T$$

$$\bar{\mathbf{M}}_1 = \text{blockdiag}(\bar{\mathbf{M}}_{X1}, \bar{\mathbf{M}}_{Y1}), \quad \bar{\mathbf{K}}_{T1} = \text{blockdiag}(\bar{\mathbf{K}}_{TX1}, \bar{\mathbf{K}}_{TY1}), \quad \bar{\mathbf{K}}_{L1} = \text{blockdiag}(\bar{\mathbf{K}}_{LX1}, \bar{\mathbf{K}}_{LY1})$$

$$\bar{\delta}(\bar{\mathbf{e}}_1) = \frac{\bar{d}_1 - \bar{l}_1}{\bar{l}_1}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{e}_{14}\tau}{\sqrt{\bar{e}_{13}^2 + \bar{e}_{14}^2}} & 0 & 0 & \frac{\bar{e}_{13}\tau}{\sqrt{\bar{e}_{13}^2 + \bar{e}_{14}^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

であり, τ は柔軟梁の根元周りに印加される制御入力である.

式 (9) および (10) と同様に式 (11) は X 方向と Y 方向の二つの表現に分割することができ,

$$\bar{\mathbf{M}}_{X1} \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_1 + (\bar{\mathbf{K}}_{TX1} + \bar{\beta}_1 \bar{\mathbf{K}}_{LX1}) \bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\Delta}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\mathbf{K}}_{LX1} \bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{B}_{X1} \tau \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{Y1} \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_1 + (\bar{\mathbf{K}}_{TY1} + \bar{\beta}_1 \bar{\mathbf{K}}_{LY1}) \bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\Delta}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\mathbf{K}}_{LY1} \bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{B}_{Y1} \tau \quad (13)$$

となる. ただし, $\mathbf{B}_{X1}$ および $\mathbf{B}_{Y1}$ は以下の通りである.

$$\mathbf{B}_{X1} = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{e}_{14}}{\sqrt{\bar{e}_{13}^2 + \bar{e}_{14}^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_{Y1} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{e}_{13}}{\sqrt{\bar{e}_{13}^2 + \bar{e}_{14}^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

目標位置を正側の X 軸上に重なる位置と仮定すると, 制御目的は任意の初期状態にある柔軟梁を残留振動を抑制させながら正側の X 軸上で安定化することになる. そのような仮定は柔軟梁の制御において一般性を失うことはない. なぜならば, 図 3 に示すように適切な座標変換によって様々な初期位置と目標位置の制御目的を上述の制御目的に帰着させることが可能だからである. 以降では前述の制御目的を前提に議論を展開する.

Figure 3 Configuration of initial and target state for controller design

初期状態から目標位置に柔軟梁が近づくとき、根元の勾配も目標位置での勾配に近づく。その結果、次の仮定

$$\mathbf{B}_{x1} \approx [0 \ 0 \ 0]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{B}_{y1} \approx [1 \ 0 \ 0]^T \quad (15)$$

を設けることが可能である。式 (9), (10), (12), (13), (14) および (15) を考慮すると、目標状態付近では制御入力 of X 方向の挙動に影響を及ぼさないと想定することが可能であり、制御系設計は Y 方向の挙動に関する運動方程式に対してのみ適用する。式 (15) と節点に関する関係

$$\begin{cases} \bar{e}_{i6} = \bar{e}_{(i+1)2} \\ \bar{e}_{i8} = \bar{e}_{(i+1)4} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n_c - 1$$

を考慮すると、式 (10) および (13) で表される運動方程式を重ね合わせることで、 Y 方向に関する全システムの数学モデルが次のように得られる。

$$\bar{\mathbf{M}}_Y \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_Y + \bar{\mathbf{K}}_A \bar{\mathbf{e}}_Y + \sum_{i=1}^{n_c} \Delta_i \bar{\mathbf{K}}_{Bi} \bar{\mathbf{e}}_Y = \mathbf{B}_Y \tau \quad (16)$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{e}}_Y = [\bar{e}_{14} \ \bar{e}_{22} \ \bar{e}_{24} \ \bar{e}_{32} \ \bar{e}_{34} \ \cdots \ \bar{e}_{(n_c-1)2} \ \bar{e}_{(n_c-1)4} \ \bar{e}_{(n_c)2} \ \bar{e}_{(n_c)4} \ \bar{e}_{(n_c)6} \ \bar{e}_{(n_c)8}]^T$$

$$\bar{\mathbf{M}}_Y = \text{blockdiag}(\bar{\mathbf{M}}_{Y1}, \mathbf{0}_{2(n_c-1) \times 2(n_c-1)}) + \sum_i^{n_c} \text{blockdiag}(\mathbf{0}_{(2i-1) \times (2i-1)}, \bar{\mathbf{M}}_{Yi}, \mathbf{0}_{2(n_c-i-1) \times 2(n_c-i-1)})$$

$$\bar{\mathbf{K}}_A = \text{blockdiag}(\bar{\mathbf{K}}_{TY1} + \beta_1 \bar{\mathbf{K}}_{LY1}, \mathbf{0}_{2(n_c-1) \times 2(n_c-1)}) + \sum_i^{n_c} \text{blockdiag}(\mathbf{0}_{(2i-1) \times (2i-1)}, \bar{\mathbf{K}}_{TYi} + \beta_1 \bar{\mathbf{K}}_{LYi}, \mathbf{0}_{2(n_c-i-1) \times 2(n_c-i-1)})$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{B1} = \text{blockdiag}(\bar{\mathbf{K}}_{LY1}, \mathbf{0}_{2(n_c-1) \times 2(n_c-1)}), \quad \bar{\mathbf{K}}_{Bi} = \text{blockdiag}(\mathbf{0}_{(2i-1) \times (2i-1)}, \bar{\mathbf{K}}_{LYi}, \mathbf{0}_{2(N-i-1) \times 2(N-i-1)}) \text{ for } i = 2, 3, \dots, n_c$$

$$\mathbf{B}_Y = [1 \ \mathbf{0}_{1 \times 2n_c}]^T$$

である。このとき、式 (16) は状態空間表現で次のように表すことができる。

$$\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^{n_c} \Delta_i \mathbf{A}_i) \mathbf{q} + \mathbf{B} \tau \quad (17)$$

$$\mathbf{q} = [\bar{\mathbf{e}}_Y^T \ \dot{\bar{\mathbf{e}}}_Y^T]^T, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} & \mathbf{I}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} \\ -\bar{\mathbf{M}}_Y^{-1} \bar{\mathbf{K}}_A & \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} & \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} \\ -\bar{\mathbf{M}}_Y^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{Bi} & \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} \end{bmatrix}$$

さらにすべての節点の座標と傾きが計測可能とすると、システムに対する観測方程式は次式で与えられる。

$$\mathbf{s} = \mathbf{C} \mathbf{q} + \mathbf{D} \tau \quad (18)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} \ \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)}], \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times 1}$$

ただし, $\mathbf{s}$ は観測出力ベクトルであり節点座標 $\bar{\mathbf{e}}_y$ に一致する.

図 4 に示すように不確かさに関する出力変数 z_i および入力変数 w_i を導入すると, 式 (17) で表される状態方程式と式 (18) で表される観測方程式を考慮したシステムの数学表現は

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (19)$$

となる⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾. ここで, 各パラメータは次の通りである.

$$\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_{n_c}]^T, \quad \mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{n_c}]^T, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{E}_1 \ \mathbf{E}_2 \ \cdots \ \mathbf{E}_{n_c}], \quad \mathbf{F} = [\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \cdots \ \mathbf{F}_{n_c}]$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1^T \ \mathbf{G}_2^T \ \cdots \ \mathbf{G}_{n_c}^T]^T, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{H}_1^T \ \mathbf{H}_2^T \ \cdots \ \mathbf{H}_{n_c}^T]^T$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{F}_i \end{bmatrix} [\mathbf{G}_i \ \mathbf{H}_i], \quad \begin{bmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{F}_i \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(4n_c+2) \times r_i}, \quad [\mathbf{G}_i \ \mathbf{H}_i] \in \mathbf{R}^{r_i \times (4n_c+2)}, \quad r_i = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} \\ \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} & \mathbf{0}_{(2n_c+1) \times (2n_c+1)} \end{bmatrix}$$

式 (19) と図 4 が示すように, システムの数学表現は μ 設計法に基づく制御系設計法に適した形になっていることが分かる⁽¹¹⁾. 上述の変形過程から明らかなように, ANCF に基づく L1-T1 モデルを用いると μ 設計に適した形の数学モデルを容易に得ることができ, ANCF に基づく数学モデルはロバスト制御系設計の枠組みに対して多くの可能性を有していると言える.

2・3 μ 設計の適用

制御性能を考慮するために, 新たに入出力, $\tilde{z}_1, \tilde{w}_1, \tilde{z}_2 = [\tilde{z}_{21} \ \tilde{z}_{22} \ \cdots \ \tilde{z}_{2(1+2n_c)}]^T, \tilde{w}_2 = [\tilde{w}_{21} \ \tilde{w}_{22} \ \cdots \ \tilde{w}_{2(1+2n_c)}]^T$ を導入する. また, 図 5 に示すように新たな入出力の導入に関連して重み関数 $W_{in1}, W_{out1}, W_{in2}, W_{out2}$ も導入する.

MATLAB で提供されている制御系設計のツールボックスを用いることで, 図 5 に示されるモデルから μ 設計に基づく制御則を効率よく導出することが可能である. ただし, 紙面の都合および本論文の構成において本質的ではないということから標準的な H_∞ 問題として扱うための条件の緩和などの追加的な処理については省略する.

Figure 4 System with uncertainties

Figure 5 Augmented system for performance evaluation

3. 数値解析

本章では数値解析によって提案する制御系設計手法の有効性を示す. 前述のように制御目的は柔軟梁を初期状態から目標位置まで動かし, 残留振動を抑制することであり, 目標位置は正側の X 軸上である. それゆえ, 観測された節点の Y 軸方向に関する座標と勾配を $\mathbf{0}$ にするように制御する.

3・1 制御対象および制御系設計のためのパラメータ

表 1 は柔軟梁の物理パラメータを示し、表 2 は制御系設計に必要なパラメータを示している。また、制御系設計に必要な重み関数は

$$W_{in1} = 0.001, W_{out1} = 5.0$$

$$\mathbf{W}_{in2} = \text{diag}(W_{in2}, W_{in2}, W_{in2}, W_{in2}, W_{in2}), \mathbf{W}_{out2} = \text{diag}(W_{out2}, W_{out2}, W_{out2}, W_{out2}, W_{out2})$$

$$W_{in2} = 0.001, W_{out2} = \frac{3.0s^2 + 4.5 \times 10^3 s + 2.1 \times 10^7}{s^2 + 1.0 \times 10^3 s + 2.0 \times 10^6}$$

であり、試行錯誤的に決定したものである。表 2 が示すように制御系設計のためのモデルの要素数は多いとは言えないが、要素数が大きくなるにつれて制御則の次元も非常に大きくなることや、この度の研究では ANCF で導出した数学モデルに基づく制御系設計の可能性を探ることを目的としていることから $n_c = 2$ で十分であることに注意されたい。

Table 1 Dimensions and physical parameters of the flexible beam

Dimensions and physical parameters	Value
Length [m]	1.0
Width [m]	0.05
Thickness [m]	0.003
Young's modulus [Pa]	70e9
Mass density [kg/m ³]	1400

Table 2 Parameters for controller design

Parameters for controller design	Value
Number of the elements for the controller design model(n_c)	2
Shrinkage rate of the 1st element ($\bar{\alpha}_1$)	0.95
Shrinkage rate of the 2nd element ($\bar{\alpha}_2$)	0.95

前述のパラメータを用いて制御則を導出すると

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_K = \mathbf{A}_K \mathbf{X}_K + \mathbf{B}_K \mathbf{s} \\ \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}_K \mathbf{X}_K + \mathbf{D}_K \mathbf{s} \end{cases} \quad (20)$$

を得る。ただし $\mathbf{X}_K \in \mathbf{R}^{24}$ であり、このときの μ は 0.331 であった。式 (20) に現れる行列の詳細は紙面の制限からここでは省略する。

3・2 数値解析のための数学モデル

制御系設計に用いた L1-T1 モデルは精度の良い結果を得るためには非常に多くの要素を必要とするため、Berzeri らによって提案されている L2-T1 モデルを用いて数値解析を行うためのモデルを導出した。これは、他のモデルに対し比較的少ない要素数で十分な精度が得られるからである。L2-T1 モデルによる数学モデルは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_e^T \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (21)$$

で与えられ、 $\mathbf{e}$ は節点座標ベクトル、 $\mathbf{M}$ は慣性行列、 $\mathbf{C}_e$ は拘束方程式の $\mathbf{e}$ に関する微分、 $\mathbf{Q}$ は外力および剛性力から構成される項、 $\boldsymbol{\lambda}$ はラグランジュ定数、 $\boldsymbol{\gamma}$ は $\dot{\mathbf{e}}$ 以外の拘束方程式の時間微分に関するベクトルである。式 (21) の導出は本論文の主題ではないため、導出過程は付録に簡潔に示す。また、式 (21) に現れる各行列に関するパラメータについても付録に示す。式 (21) の導出にあたり要素数は $n_n = 4$ としており、表 1 のパラメータを持つ対象を解析するためには十分な値であることを事前の数値解析から確認している。

3・3 数値解析結果

式 (21) のシステムに式 (20) で示される制御則を適用することで数値解析を行った。初期状態は正側の X 軸から反時計方向に 10 度回転させた位置に静止しているものとした。制御性能を評価するパラメータとして γ_{np} と

$|d_{tip}|$ を導入した。図6に示すように Y_{tip} は柔軟梁の先端位置の Y 座標であり $|d_{tip}|$ は梁の変形時の先端と変形していないと仮定した場合の先端の距離である。図7および図8は Y_{tip} および $|d_{tip}|$ の時刻歴応答を示す。図7が示すように制御開始直後は梁の先端は X 軸から離れるように動き、その後軸に近づき始めている。さらに、0.7[s]付近の0.16[m]付近のオーバーシュートの後は梁の先端は目標位置に近づいており2.0[s]以降ではほぼ目標状態に落ち着いている。しかしながら、2.0[s]以降に高い振動数の残留振動が残っている。また、図8が示すように $|d_{tip}|$ が制御開始直後に0.14[m]以上と大きな値になっており、柔軟梁が大きく変形していることを意味している。その後、 $|d_{tip}|$ は振動的な挙動を示し、0.4[s]付近でその振幅は最小の値となっている。その後、振幅は0.5[s]から1.5[s]まで徐々に増加し、1.5[s]以降はほぼ同じ振幅を維持している。1.5[s]以降においても比較的大きな振幅の振動が発生しているように見えるが、その際の変形形状を観察すると $|d_{tip}|$ の大きな値は高次モードの振動の根元の勾配の大きな値に起因している。図9は2.0[s]と3.0[s]の梁の形状を示しており、その形状から変形そのものは比較的小さいことが分かる。

Figure 6 Definition of Y_{tip} and $|d_{tip}|$ for evaluation of controller performance

Figure 7 Time history of Y_{tip}

Figure 8 Time history of $|d_{tip}|$

Figure 9 Shape of the beam at 2.0[s] and 3.0[s]

4. 結論および今後の課題

4・1 結論

本論文では制御系設計手法を提案した。提案手法では ANCF における連続体力学に基づく手法に基づく数学モデルが μ 設計の手法に適した形に変形することが容易であることを活用している。根元に制御トルクが印加される柔軟梁に対して提案手法による制御系を設計し、導出した制御則による数値解析を行った。定常状態において多少の残留振動は残っているものの制御目的はおおよそ達成され、提案手法の有効性を示した。

4・2 今後の課題

前述のような残留振動を完全に除去するために重み関数等の改善を行う必要がある。また、設計に用いられる数学モデルが絶対座標によって記述されているため、重み関数の解釈についての再検討も必要である。

今回の設計例では制御系設計用の数学モデルの要素数は 2 であるが、制御則の次元は 23 である。要素数を増やすことで制御則の次元がさらに増加するため、実装の観点からも制御則の低次元化についての検討も必要である。

文 献

- (1) Mimasu, Y., Kitajima, A., Yamaguchi, T., Funase, R., Morimoto, M. Y., Sawada, H., Takeuchi, H., Mori, O., Tsuda Y. and Kawaguchi J. 2010, “Photon Acceleration Model of Flexible Spinning Solar Sail”, Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan, vol. 8, pp.Pk_1-Pk_6.
- (2) Nakasuka, S., Sahara, H., Nakamura, Y., Funase, R., Nagai, M., Miyamura, N., Enokuchi, A., Hatsutori, Y., Funane, T., Sasaki, F., Nojiri, Y., Komatsu, M., Sugawara, Y., and Kaya, N., 2006, “Sounding Rocket Experimental Results of Large Net Extension in Space to be Applied to Future Large Phased Array Antenna”, SpaceTechnology · Space Engineering, Telecommunication, Systems Engineering and Control, Vol.26, No.3-4, pp165-170.
- (3) Shabana, A. A., Hussien, H. A. and Escalona, J. L., 1998, “Application of the absolute nodal formulation to large rotation and large deformation problems”, Journal of Mechanical Design, Vol.120, pp. 188-195.
- (4) Yakoub, R. Y. and Shabana, A. A., 2001, “Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements”, Journal of Mechanical Design, Vol.123, pp. 606-621.
- (5) Yoo, W. S., Lee, J. H., Park, S. J., Sohn, J. H., Dmitrochenko, O. and Pogorelov, D. Y., 2003, “Large Oscillation of a Thin Cantilever Beam: Physical Experiments and Simulation Using the Absolute Nodal Coordinate Formulation”, Nonlinear Dynamics, Vol.34, pp. 3-29.
- (6) Wago, T., Sugawara, Y. and Kobayashi, N., 2010, “Reduction of System Matrices of Planar Beam in ANCF by Component Mode Synthesis Method”, Proceedings of the 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics (CD-ROM), Lappeenranta, Finland.
- (7) Berzeri, M., and Shabana, A. A., 2000, “Development of Simple Models for the Elastic Forces in the Absolute Nodal Co-ordinate Formulation”, Journal of Sound and Vibration, Vol.235. No.4, pp.539-565.
- (8) Doyle, J.C., 1982, “Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties”, IEE Proceedings Part D, Vol.133, pp.45-56.
- (9) Morton, B., and McAfoos, R., 1985, “A Mu-test for a real parameter variations”, Proceedings of the American Control Conference, pp.135-138.
- (10) Glover, K. and Doyle, J. C., 1988, “State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy a norm bound and relations to risk sensitivity”, System and Control Letters, Vol.11, pp167-172.
- (11) Balas, G., Doyle, J. C., Glover, K., Packard, A. and Smith, R., 1994, “Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide, MUSYN Inc. and The Mathworks Inc.
- (12) Shabana, A. A., 2005, Dynamics of Multibody Systems 3rd edition, Cambridge University Press.

付 録

制御系設計のための数学モデルの導出と同様に第 i 要素の節点座標を図 A1 および式 (A1) のように定義する。

$$e_{i1} = X_i \Big|_{x_i=0}, e_{i2} = Y_i \Big|_{x_i=0}, e_{i3} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0}, e_{i4} = \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0}, e_{i5} = X_i \Big|_{x_i=l_i}, e_{i6} = Y_i \Big|_{x_i=l_i}, e_{i7} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i}, e_{i8} = \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i} \quad (\text{A1})$$

ただし、 $i=1, \dots, n_n$ であり n_n は数値解析のための数学モデルの要素数を表す。節点座標のベクトルを

$$\mathbf{e}_i = [e_{i1} \ e_{i2} \ e_{i3} \ e_{i4} \ e_{i5} \ e_{i6} \ e_{i7} \ e_{i8}]^T$$

と定義すると、第 i 要素上の任意の点の絶対座標 $\mathbf{r}_i$ は

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ix} \\ \mathbf{S}_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3\xi_i^2+2\xi_i^3 & 0 & l_i(\xi_i-2\xi_i^2+\xi_i^3) & 0 & 3\xi_i^2-2\xi_i^3 & 0 & l_i(\xi_i^3-\xi_i^2) & 0 \\ 0 & 1-3\xi_i^2+2\xi_i^3 & 0 & l_i(\xi_i-2\xi_i^2+\xi_i^3) & 0 & 3\xi_i^2-2\xi_i^3 & 0 & l_i(\xi_i^3-\xi_i^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

であり、 $\xi_i = x_i/l_i$ 、 l_i は第 i 要素の無変形時の長さである。運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーおよび外力による仮想仕事を式 (A2) を用いて導出すると、第 i 要素 ($i=1, \dots, n_n$) に対する L2-T1 モデルは

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{K}_{Ti} \mathbf{e}_i + \mathbf{K}_{Li}(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = \mathbf{Q}_i \quad (\text{A3})$$

で与えられる。式 (A3) および拘束方程式を考慮すると制御対象の数値解析のための数学モデルは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_\epsilon^T \\ \mathbf{C}_\epsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{e}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$$

と与えられる。ただし、

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_{n_n}^T]^T, \quad \mathbf{M} = \text{blockdiag}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{n_n}),$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_T + \mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_E, \quad \mathbf{Q}_T = [\mathbf{e}_1^T \mathbf{K}_{T1}, \mathbf{e}_2^T \mathbf{K}_{T2}, \dots, \mathbf{e}_{n_n}^T \mathbf{K}_{Tn_n}]^T,$$

$$\mathbf{Q}_L = [\mathbf{e}_1^T \mathbf{K}_{L1}, \mathbf{e}_2^T \mathbf{K}_{L2}, \dots, \mathbf{e}_{n_n}^T \mathbf{K}_{Ln_n}]^T, \quad \mathbf{Q}_E = [\mathbf{Q}_1^T, \mathbf{Q}_2^T, \dots, \mathbf{Q}_{n_n}^T]^T,$$

$$\mathbf{C}_\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial e_{11}} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial e_{12}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial e_{n_n 8}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_{n_n}]^T,$$

$$C_1 = e_{11}, \quad C_2 = e_{12}, \quad C_{4(h-1)+k} = e_{(h+1)k} - e_{h(k+4)}, \quad h=1, 2, \dots, n_n-1, \quad k=1, 2, 3, 4$$

であり、 $\boldsymbol{\lambda}$ はラグランジュ定数、 $\boldsymbol{\gamma}$ は $\ddot{\mathbf{e}}$ 以外の拘束方程式の時間微分に関する項のベクトルである⁽¹²⁾。

Figure A1 The i -th element of mathematical expression for numerical analysis