面内非対称弾性拘束を受ける長方形平板の非線形振動解析

正 丸山 真一(群大院), 正 永井 健一(群大院), ○学 櫻井 卓(群大院)

Nonlinear Vibrations of a Rectangular Plate with In-plane Asymmetric Elastic Constraints

Shinichi MARUYAMA, Ken-ichi NAGAI and Suguru SAKURAI

Gunma University, Graduate School of Engineering, Department of Mechanical System Engineering,
1-5-1, Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

This paper presents theoretical results on nonlinear vibrations of a rectangular plate subjected to gravitational and periodic acceleration laterally. The rectangular plate is simply supported at all edges, which are surrounded with an elastic material. Both uniform in-plane displacements and asymmetric in-plane displacements act as in-plane constraints on the opposite edges via the elastic material. Other opposite edges are compressed with uniform in-plane displacements. Restricting nonlinear vibrations of a thin plate in lower frequency range where bending vibrations are dominant, the effects of in-plane inertia forces can be neglected in the analysis. The Karman type equation modified with lateral inertia is applied as the governing equations of the plate. The response of lateral deflection is assumed with multiple natural modes of linear vibration including unknown time functions. Stress function including nonlinear coupling of the deflection is derived from the compatibility equation. The stress function satisfies both equilibrium conditions of in-plane forces and in-plane moments of forces at the corresponding boundaries. Substituting the deflection and the stress function to the governing equation, a set of nonlinear ordinary differential equations is derived with the Galerkin procedure. Characteristics of restoring force of the post-buckled plate, due to gravity and the in-plane constraints, show the type of a softening-and-hardening spring. Periodic responses are calculated by the harmonic balance method. Non-periodic responses are integrated numerically by the Runge-Kutta-Gill method. Frequency response curves including responses of multiple modes are obtained. Increasing the in-plane asymmetric constraints at the boundaries, responses of the plate are inspected. The amplitude of the principal response corresponding to the lowest mode of vibration is affected by the in-plane constraint. The in-plane asymmetric constraint generates a stretched area and a compressed area in the plate. Within the relatively small amplitude of response, which corresponds to the characteristic of a softening spring, the response shifts to the higher frequency region, as the asymmetric constraint is increased. On the other hand, within the relatively large amplitude of response, which corresponds to the characteristic of a hardening spring, the response becomes smaller at the stretched area, and becomes larger at the compressed area. Moreover principal resonance of the 3rd mode of vibration appears more remarkably with asymmetric constraints.

Key Words : Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Chaos and Fractals, Flexible Structure

1. 緒 言

工業製品の小型化・軽量化・高機能化が進み、近年では特に、MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) と呼ばれるセンサやアクチュエータなどの微細な機械構造が実現されている。これらの機械構造は薄肉要素により構成されており、振動を伴い動作するセンサやアクチュエータでは、薄肉要素の大振幅振動により非線形振動の発生が考えられる。このような機械構造をより精密に設計するためには、非線形振動現象の理論的解明が必要である。一般に多用される薄肉要素として、全周辺単純支持された偏平シェルの非線形振動の解析⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾や実験⁽⁴⁾を行っている。ここでは、シェルの面内方向に作用する一様な圧縮力が考慮されている。しかし、実際の板の境界において、面内に完全に一様な圧縮や引張りの拘束を受けることは無く、境界での面内応力分布も境界にわたって

変化する場合が多い。薄肉要素の非線形振動問題では、わずかな境界の拘束により、系の非線形特性が大きく変化する⁽⁵⁾ため、面内に非対称な拘束を受ける板の非線形振動の解明は工学上重要である。

そこで本研究では、全周辺単純支持された長方形平板の一つの面内方向に、弾性拘束として辺に対して非対称な初期面内変位を与えた場合の非線形振動問題の解析を行った。初期面内変位は、辺に対して一様な定数成分と辺に沿って線形に変化する1次関数の和で表した。支配方程式はカルマン型の方程式に慣性力および横方向の荷重を加えた式を用いた。面内変形については平面応力問題として扱い、適合条件式を満たすべき応力関数を導入した。支配方程式にガラキン法を適用し、連立非線形常微分方程式を得た。周期応答を調和バランス法によって求め、非対称拘束を増加させた場合の応答の変化について調べた。また、非周期応答をルンゲ-クッタ-ギル法によって求め、特定の条件下においてカオス振動応答の発生を確認した。

2. 解析方法

2・1 解析モデル

解析モデルを図1に示す。モデルは、薄肉の長方形平板である。図中 a, b はそれぞれ x, y 方向の辺の長さ、厚さは h である。 W はたわみ、 U, V はそれぞれ x, y 方向の面内変位であり、境界は全周辺にわたり、たわみ方向に対して単純支持、面内方向に対して弾性拘束されている。 K_x, K_y はそれぞれ x, y 方向の面内弾性拘束のばね定数である。また、弾性拘束として板の境界外部から弾性体を介し、 x 方向については一様な面内変位 U_{0ms}, U_{0ps} 、および $y = a/2$ を中心に非対称面内変位 U_{0ma}, U_{0pa} をばね他端に与え、 y 方向については一様な面内変位 V_{0ms}, V_{0ps} のみを与えた。

Fig.1 Model of a plate with asymmetric constraints

2・2 支配方程式と境界条件

解析には、薄肉平板の方程式としてよく知られたカルマン型の方程式に、横方向の慣性力および荷重を加えた次の式を用いた。

$$\bar{\nabla}^4 f = c\beta^2 \left(w_{,\xi\xi}^2 - w_{,\xi\xi} w_{,\eta\eta} \right) \quad (1)$$

$$L(w, f) = w_{,\tau\tau} + \bar{\nabla}^4 w - \beta^2 \left(f_{,\xi\xi} w_{,\eta\eta} - 2f_{,\xi\eta} w_{,\xi\eta} - f_{,\eta\eta} w_{,\xi\xi} \right) - (p_s + p_d \cos \omega\tau) - q_s \delta(\xi - \xi_1) \delta(\eta - \eta_1) = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\bar{\nabla}^2 = \partial^2 / \partial \xi^2 + \beta^2 \partial^2 / \partial \eta^2$ である。式(1)は薄肉平板の応力関数 f による適合条件式に対応し、式(2)は応力関数 f が連成したたわみ w についての運動方程式である。また、式中のカンマの後の添字は、その文字による偏微分を表す。ここでは、次の無次元量を導入している。

$$\begin{aligned}
[\xi, \xi_1] &= \frac{[x, x_1]}{a}, \quad [\eta, \eta_1] = \frac{[y, y_1]}{b}, \quad \beta = \frac{a}{b}, \quad w = \frac{W}{h}, \quad [n_x, n_y, n_{xy}] = \frac{a^2}{D} [N_x, N_y, N_{xy}], \quad [u, v] = \frac{a}{h^2} [U, V], \\
f &= \frac{F}{D}, \quad [k_x, k_y] = \frac{ah^2}{D} [K_x, K_y], \quad [p_s, p_d] = \frac{\rho a^4}{D} [a_s, a_d], \quad q_s = \frac{Q_s a^2 \beta}{Dh}, \quad \tau = \Omega_0 t, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_0}.
\end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\Omega_0 = (1/a^2)\sqrt{D/\rho h}$ 、 $c = 12(1-\nu^2)$ である。 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ は薄肉平板の曲げ剛性、 E, ν および ρ は、それぞれヤング率、ポアソン比、密度である。また、 ξ, η は無次元座標、 β は板の辺の細長比である。 w はたわみ W の無次元量、一方、 u, v はそれぞれ ξ, η 方向の無次元面内変位である。 N_x, N_y および N_{xy} はそれぞれ x 方向、 y 方向、せん断方向に働く単位長さあたりの断面力であり、 k_x, k_y は x 方向、 y 方向の面内弾性拘束における無次元ばね定数である。 p_s, p_d はそれぞれ静的加速度 a_s 、周期加速度振幅 a_d の無次元量である。 q_s は位置 (x_1, y_1) に働く集中荷重 Q_s の無次元量であり、静的復元力特性の計算にのみ用いる。 τ は無次元時間、 ω は無次元加振振動数である。 n_x, n_y および n_{xy} はそれぞれ N_x, N_y および N_{xy} の無次元量であり、応力関数 F の無次元量 f と次の関係を持つ。

$$n_x = \beta^2 f_{,\eta\eta}, \quad n_y = f_{,\xi\xi}, \quad n_{xy} = -\beta f_{,\xi\eta}. \quad (4)$$

また、応力と歪みの関係より面内変位 u, v は w および f と次の関係を持つ。

$$\begin{aligned}
c \left[u_{,\xi} + \frac{1}{2} w_{,\xi}^2 \right] &= \beta^2 f_{,\eta\eta} - \nu f_{,\xi\xi}, \\
c \left[\beta v_{,\eta} + \frac{\beta^2}{2} w_{,\eta}^2 \right] &= f_{,\xi\xi} - \nu \beta^2 f_{,\eta\eta}, \\
c \left[\beta u_{,\eta} + v_{,\xi} + \beta w_{,\xi} w_{,\eta} \right] &= -2\beta(1+\nu) f_{,\xi\eta}.
\end{aligned} \quad (5)$$

式(5)の三つの式から面内の適合条件式(1)が導かれる。

たわみについての境界条件は、全周辺で単純支持されているので次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\xi = 0, 1: w &= 0, \quad w_{,\xi\xi} = 0, \\
\eta = 0, 1: w &= 0, \quad w_{,\eta\eta} = 0.
\end{aligned} \quad (6)$$

また、全周辺で弾性拘束される面内変形についての境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\xi = 0: \int_0^1 [n_x - k_x (u - u_{0m})] d\eta &= 0, \quad \int_0^1 n_{xy} d\eta = 0, \\
\xi = 1: \int_0^1 [n_x + k_x (u - u_{0p})] d\eta &= 0, \quad \int_0^1 n_{xy} d\eta = 0, \\
\eta = 0: \beta \int_0^1 [n_y - k_y (v - v_{0m})] d\xi &= 0, \quad \beta \int_0^1 n_{xy} d\xi = 0, \\
\eta = 1: \beta \int_0^1 [n_y + k_y (v - v_{0p})] d\xi &= 0, \quad \beta \int_0^1 n_{xy} d\xi = 0.
\end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 u_{0m}, u_{0p}, v_{0m} および v_{0p} は、板境界の弾性拘束によって外部から与えられる無次元初期面内変位である。上式では、板の境界における断面力の釣合いを境界にわたる平均値で近似的に満足する条件式となっている。本

解析では、 ξ 方向に $\eta = 1/2$ を中心とした非対称の面内拘束変位を与えていることから、式 (7) の平均化した力の釣合いの境界条件のみでは、非対称拘束変位によって発生する偶力の効果を考慮することができない。そこで、式 (7) の被積分項に $(\eta - 1/2)$ を乗じ、力のモーメントの釣合い式を境界条件として加える。

$$\begin{aligned}\xi = 0: & \int_0^1 \left[n_x - k_x (u - u_{0m}) \right] \left(\eta - \frac{1}{2} \right) d\eta = 0, \quad \int_0^1 n_{xy} \left(\eta - \frac{1}{2} \right) d\eta = 0, \\ \xi = 1: & \int_0^1 \left[n_x + k_x (u - u_{0p}) \right] \left(\eta - \frac{1}{2} \right) d\eta = 0, \quad \int_0^1 n_{xy} \left(\eta - \frac{1}{2} \right) d\eta = 0.\end{aligned}\quad (8)$$

また、上式において、

$$u_{0m} = u_{0ms} + 2u_{0ma} \left(\eta - \frac{1}{2} \right), \quad u_{0p} = u_{0ps} + 2u_{0pa} \left(\eta - \frac{1}{2} \right), \quad v_{0m} = v_{0ms}, \quad v_{0p} = v_{0ps}. \quad (9)$$

であり、 u_{0ma}, u_{0pa} は偶力のみを与える無次元初期面内変位である。式 (8) では板の単位長さ辺りの断面力と弾性拘束による復元力に対応するモーメントが、それぞれ辺にわたって平均的に釣り合うことを表している。薄肉平板の振動解は、これらの支配方程式と境界条件を満足する w, f より得られる。

2・3 多自由度系への変換

支配方程式にガラーキン法を適用し、多自由度系の常微分方程式に変換する。ここで、たわみ w を次のように仮定する。

$$\begin{aligned}w(\xi, \eta, \tau) &= \sum_m \sum_n \hat{b}_{mn}(\tau) \hat{\xi}_{mn}(\xi, \eta), \\ \hat{\xi}_{mn}(\xi, \eta) &= \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots).\end{aligned}\quad (10)$$

ここで、 $\hat{b}_{mn}$ は未知時間関数、 $\hat{\xi}_{mn}$ は座標関数であり、 m, n はそれぞれ座標関数の x, y 方向の半波数である。

適合条件式 (1) の解となる応力関数 f は、同次解と特殊解の和で表され、 $\hat{b}_{mn}$ の関数として次のように記述される。

$$\begin{aligned}f &= \frac{1}{2} p_x \xi^2 + \frac{1}{2} p_x \eta^2 + p_{xy} \xi \eta + \frac{1}{6} p_{xa} \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^3 \\ &+ \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \hat{b}_{kl} \hat{b}_{mn} [\theta_{klmn}^{(1)} \cos(\bar{k} - \bar{m}) \xi \cos(\bar{l} - \bar{n}) \eta + \theta_{klmn}^{(2)} \cos(\bar{k} - \bar{m}) \xi \cos(\bar{l} + \bar{n}) \eta \\ &\quad + \theta_{klmn}^{(3)} \cos(\bar{k} + \bar{m}) \xi \cos(\bar{l} - \bar{n}) \eta + \theta_{klmn}^{(4)} \cos(\bar{k} + \bar{m}) \xi \cos(\bar{l} + \bar{n}) \eta], \\ &\quad (k, l, m, n = 1, 2, 3, \dots).\end{aligned}\quad (11)$$

式 (11) 右辺の第 1~4 項は適合条件式 (1) の同次解に、第 5 項以降は特殊解にそれぞれ対応する。ここで、 $\bar{m} = \pi m$ であり、 $\theta_{klmn}^{(N)}$ ($N = 1, 2, 3, 4$) は平板の振動形状の波数に関する係数である。また、 p_x, p_y, p_{xy} および p_{xa} は時間関数であり、応力関数 f と式 (4) より得られる単位長さ辺りの断面力 n_x, n_y および n_{xy} が式 (7) および式 (8) の境界条件を満足するように決定される。また、 ξ 方向の面内弾性拘束として、辺にそって線形に変化する非対称の変位を与えることから、 ξ 方向の単位長さ辺りの面内力の分布を、 ξ についての 1 次関数で近似する。そのため、式 (11) の応力関数の第 4 項 $(1/6) p_{xa} (\eta - 1/2)^3$ を導入した。これにより、応力関数 f を式 (4) に代入すること

で、辺に沿って線形に変化する ξ 方向の面内力分布が得られる。また、式(10)、(11)を式(5)に代入することで、面内変位 u, v が求まる。時間関数 p_x, p_y, p_{xy} および p_{xa} は、力の釣り合いの境界条件式(7)およびモーメントの釣り合いの境界条件式(8)より次式となる。

$$p_y = \sum_m \sum_n e_{mn}^{(1)} \hat{b}_{mn}^2 + g_1, \quad p_x = \sum_m \sum_n e_{mn}^{(2)} \hat{b}_{mn}^2 + g_2, \quad p_{xy} = 0, \quad p_{xa} = \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n d_{klmn}^{(1)} \hat{b}_{kl} \hat{b}_{mn} + g_3. \quad (12)$$

ここに、 $d_{klmn}^{(1)}, e_{mn}^{(i)} (i=1,2)$ および $g_j (j=1,2,3)$ は、それぞれ平板の幾何学的形状、面内拘束ばね剛性および初期面内変位についての関数である。

これまでの手法で、 w および f は未知時間関数 $\hat{b}_{mn}(\tau)$ によって表された。ここで、運動方程式(2)にガラーキン法を適用する。座標関数 $\hat{\xi}_{rs}$ についてのガラーキンの条件式は次式で表される。

$$\int_0^1 \int_0^1 L(w, f) \hat{\xi}_{rs}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots). \quad (13)$$

式(10)、(11)を式(13)に代入し、積分することで、 $\hat{b}_{mn}(\tau)$ についての連立非線形常微分方程式が得られる。式(13)の $\hat{\xi}_{rs}$ の添え字 r, s の組は振動モードのパターンを表し、これを新たに添え字 i とする。これにより未知時間関数 $\hat{b}_{mn}(\tau)$ は新たな変数 $\bar{b}_i(\tau)$ に対応する。すなわち、 $\bar{b}_j \equiv \hat{b}_{mn}$ 、 $\bar{\xi}_j \equiv \hat{\xi}_{mn}$ と置き換える。これらの変数はシェルの振動形状の半波数の組に対応し、例えば、 $\hat{b}_{11}, \hat{b}_{21}$ および $\hat{b}_{12}$ は、それぞれ $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ および $\bar{b}_3$ となる。よって、式(13)より得られた連立非線形常微分方程式は次のように再配列される。

$$\sum_j \bar{B}_{ij} \bar{b}_{j,\tau\tau} + \sum_j \bar{C}_{ij} \bar{b}_j + \sum_j \sum_k \sum_l \bar{E}_{ijkl} \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l - (p_s + p_d \cos \omega \tau) \bar{G}_i - q_s \bar{H}_i = 0, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

式(14)において、 $\bar{B}_{ij}$ は慣性項の係数、 $\bar{C}_{ij}$ および $\bar{E}_{ijkl}$ はそれぞれ1次、3次の復元力項の係数である。 $\bar{G}_i$ は板に作用する加速度に関する項の係数、 $\bar{H}_i$ は集中荷重に関する項である。

薄肉平板の動的応答は、静的加速度 p_s による静荷重と境界における面内拘束によって生じる静的変形の影響を強く受ける。したがって、静的変形と動的応答は、次に示す連続的な方法によって順次求められる。まず初めに、たわみ $w(\xi, \eta, \tau)$ を次のように静たわみ $\bar{w}(\xi, \eta)$ と動的変位 $\bar{w}(\xi, \eta, \tau)$ に分けて記述する。

$$w(\xi, \eta, \tau) = \bar{w}(\xi, \eta) + \bar{w}(\xi, \eta, \tau), \\ [w(\xi, \eta, \tau), \bar{w}(\xi, \eta), \bar{w}(\xi, \eta, \tau)] = \sum_j [\bar{b}_j(\tau), \bar{b}_j, \bar{b}_j(\tau)] \bar{\xi}_j(\xi, \eta), \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \quad (15)$$

ここに、 $\bar{b}_j$ は静的変形に対応する未知定数、 $\bar{b}_j(\tau)$ は静的平衡点からの動的変位の未知時間関数である。これより、変数 $\bar{b}_j(\tau)$ は $\bar{b}_j(\tau) = \bar{b}_j + \bar{b}_j(\tau)$ と書ける。これを式(14)に代入すると、 $\bar{b}_j$ についての連立方程式と $\bar{b}_j(\tau)$ についての連立常微分方程式が得られる。 $\bar{b}_j$ についての連立3次方程式から静たわみ $\bar{w}(\xi, \eta)$ が決定する。ゆえに、静的平衡点からの新たな座標 $\bar{b}_j$ についての運動方程式より動的変位が求められる。この運動方程式から周期加速度項と非線形項を省略すると、微小自由振動に対応する線形方程式が得られる。この式から線形固有振動数 ω_i と対応する固有ベクトル ϕ_{ip} ($p=1, 2, 3, \dots$)が求まり、固有振動モード $\bar{\xi}_i (i=1, 2, 3, \dots)$ が得られる。

動的応答の解析のため $\bar{\xi}_i$ についての基準座標 b_i を導入すると、静的平衡点からのたわみ $\bar{w}$ は次式で表される。

$$\bar{w}(\xi, \eta, \tau) = \sum_i b_i(\tau) \bar{\xi}_i(\xi, \eta), \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (16)$$

座標 $\bar{b}_j$ を基準座標 b_i に変換すると、次に示す規準形の連立非線形常微分方程式が得られる。

$$M(b_i) = b_{i,\tau} + 2\varepsilon_i \omega_i b_{i,\tau} + \omega_i^2 b_i + \sum_j \sum_k D_{ijk} b_j b_k + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} b_j b_k b_l - p_d G_i \cos \omega \tau = 0, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots). \quad (17)$$

上式は、2次、3次の非線形項に固有振動モード間の連成をもつ。なお、 i 次の線形固有振動モードに対応する減衰比 ε_i を用い、線形の減衰項を導入した。

2・4 周期応答の解法

薄肉平板の周期応答を調和バランス法により計算する。周期解 b_i を次のように仮定する。

$$b_i(\tau) = C_{i1\mu 0} + \sum_p \left[C_{i1\mu p} \cos \mu p \omega \tau + C_{i2\mu p} \sin \mu p \omega \tau \right], \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \quad p = 1, 2, 3, \dots). \quad (18)$$

ここに、 $C_{i1\mu 0}, C_{i1\mu p}$ および $C_{i2\mu p}$ は未知定数である。主共振応答および高調波共振応答を求めるには、 μ を1に設定する。一方、 $1/2, 1/3$ 次の分数次調波共振応答を求めるためには、 μ をそれぞれ $1/2, 1/3$ に設定する。式(18)を式(17)に代入し、調和バランス法を適用することで、未知係数 $C_{i1\mu 0}, C_{i1\mu p}$ および $C_{i2\mu p}$ についての連立方程式が得られる。この連立方程式の解は、ニュートン-ラフソン法によって求められる。また、応答振幅は次に示す実効値 $\tilde{w}_{rms}$ で表される。

$$\tilde{w}_{rms} = \left[\frac{1}{2} \sum_p \left\{ \left(\sum_i C_{i1\mu p} \tilde{\zeta}_i \right)^2 + \left(\sum_i C_{i2\mu p} \tilde{\zeta}_i \right)^2 \right\} + \left(\sum_i C_{i1\mu 0} \tilde{\zeta}_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (p, i = 1, 2, 3, \dots). \quad (19)$$

2・5 非周期応答の時系列

カオス振動などの非周期応答を求めるには、非線形常微分方程式を数値積分する必要がある。変位 b_i についての未知時間関数を $b_i^{(1)}$ とし、連立非線形常微分方程式(17)を次の1階の状態方程式に変換する。

$$\begin{aligned} b_{i,\tau}^{(1)} &= b_i^{(2)}, \\ b_{i,\tau}^{(2)} &= -2\varepsilon_i \omega_i b_i^{(2)} - \omega_i^2 b_i^{(1)} - \sum_j \sum_k D_{ijk} b_j^{(1)} b_k^{(1)} - \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} b_j^{(1)} b_k^{(1)} b_l^{(1)} + p_d G_i \cos \omega \tau, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、 $b_i^{(2)}$ は変位 $b_i^{(1)}$ に対応する速度を表す。上式をルンゲ-クッタ-ギル法で数値積分することによって、非周期応答が得られる。

3. 解析結果と考察

3・1 薄肉平板の基本特性

薄肉平板の振動問題における基本特性として、固有振動数、固有振動モードおよび復元力特性を求めた。計算では板の幾何学的形状のパラメータとして次の値を用いた。

$$\beta = 1, \quad k_x = k_y = 0.1, \quad u_{0ms} = 600, \quad u_{0ps} = -600, \quad v_{0ms} = v_{0ps} = 0. \quad (21)$$

板は正方形とし、 ξ 方向にのみ面内圧縮変位を加えた。式 (21) の圧縮変位を基準とし、これに非対称拘束変位 u_{0ma}, u_{0pa} を加え、非対称拘束による固有振動数、固有振動モードおよび復元力特性への影響を調べた。また自重の影響を考慮し、無次元静的加速度を $p_s = 350$ とした。今回、面内に $\eta = 1/2$ を中心とした非対称拘束を与えることから、 ξ 方向に 1 個、 η 方向に 2 個の波数を持つ (1,2) モードの誘起が予測される。そこで、たわみ w の解を式 (10) において $m=2, n=2$ の座標関数の重ね合わせとし、4 項近似で仮定した。

ξ 方向に一樣圧縮のみを与えた場合、および、一樣圧縮に加え非対称拘束 $u_{0ma} = -800, u_{0pa} = 800$ ($0 \leq \eta < 0.5$ で面内圧縮、 $0.5 < \eta \leq 1$ で面内引張り) を与えた場合の無次元固有振動数と固有振動モードを表 1 に示す。また、表に示す ω_{mn} ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) は固有振動モード (m, n) に対応した固有振動数を表す。非対称拘束を与えた場合の固有振動数は、一樣圧縮の場合に比べて (2,1) モードの固有振動数 ω_{21} は減少し、それ以外の固有振動数は増加している。固有振動モードについては、(2,1) モードで最大振幅位置が η の負方向に移動し、(2,2) モードでは $\eta = 0 \sim 0.5$ の範囲の振幅が小さくなっていることが分かる。また、各座標点ごとの振幅を細かく調べると、(1,1) モードでは最大振幅位置が η の正方向に移動している。(1,2) モードでは $\eta = 0.5 \sim 1$ の範囲の振幅が小さくなり、節が η の正方向に移動している。(2,2) モードでは最大振幅の位置の変化に加え、節が η の負方向に移動している。また、モードによって最大振幅位置や節の移動する向きが異なる。これらは、いずれも ξ 方向の非対称拘束によって面内応力と面外変位が変化し、静的変位が発生したためと考えられる。

次に、 ξ 方向の非対称拘束変位を増加させた場合の、測定点 (a) $\xi = 0.6, \eta = 0.6$, (b) $\xi = 0.6, \eta = 0.4$ における復元力特性の変化を図 2 に示す。図の縦軸は無次元集中荷重 q_s 、横軸は静たわみ $\bar{w}$ である。荷重点は (a), (b) と

Table 1 Linear natural frequencies and modes of vibration

	Mode(m,n)	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
$u_{0ms} = 600, u_{0ps} = -600$ (Symmetric)	Modal pattern
	ω_{mn}	35.8	53.3	70.3	71.7
$u_{0ms} = 600, u_{0ps} = -600,$ $u_{0ma} = -800, u_{0pa} = 800$ (Symmetric and Asymmetric)	Modal pattern
	ω_{mn}	36.1	52.8	70.8	72.9

Fig. 2 Characteristics of restoring force with asymmetric constraints measured at (a) $\xi = 0.6, \eta = 0.6$ and (b) $\xi = 0.6, \eta = 0.4$

もに $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ である。一様圧縮のみが作用する場合、飛び移りを伴う漸軟-漸硬形の復元力特性を示す。また、非対称拘束変位の増加に伴った復元力特性の変化を矢印で示した。 $\eta = 1/2$ を中心とした非対称拘束より、測定点 (a) では圧縮と引張り、測定点 (b) では圧縮のみが作用する。どちらの測定点においても、非対称拘束変位が増加すると漸軟形復元力特性を示す領域の負の勾配が急になることが分かる。しかし、荷重を負に増加させて飛び移り座屈を生じた後の静たわみを比較すると、測定点 (a) では非対称拘束変位が増加するに伴い静たわみが減少するのに対し、測定点 (b) では静たわみは増加している。これは、非対称拘束の引張りによりたわみが抑えられ、圧縮によりたわみが増加したためである。

3・2 周波数応答曲線

非対称拘束による周期解の変化を調べるために、無次元静的加速度 $p_s = 350$ に加え、無次元振幅 $p_d = 500$ の周期加振加速度 $p_d \cos \omega \tau$ のもとで、調和バランス法より周波数応答曲線を求めた。各線形固有振動モードに対応する減衰比は $\varepsilon_i = 0.01$ ($i=1,2,3,4$) とした。 ξ 方向の非対称拘束変位を増加させた場合の、測定点 (a) $\xi = 0.6, \eta = 0.6$, (b) $\xi = 0.6, \eta = 0.4$ における周波数応答曲線の変化を図 3 に示す。図の縦軸は無次元動的変位の実効値 $\tilde{w}_{rms}$ 、横軸は無次元加振振動数 ω である。図 (a), (b) より、一様圧縮のみが作用する場合、(1,1) モードの主共振応答は漸軟-漸硬形の復元力特性に対応した応答曲線となる。また、非対称拘束変位の増加に伴った周波数応答曲線の変化を矢印で示した。非対称拘束変位を増加させると、各測定点ともに漸軟特性が顕著となる。漸硬形の復元力特性に対応する部分の大振幅応答は、測定点 (a) では減少し、測定点 (b) では増加しており、復元力特性と対応した変化が確認できる。漸硬部分の応答の変化は、測定点 (a) では非対称拘束の引張りによって応答振幅が抑えられ、測定点 (b) では非対称拘束の圧縮により応答振幅が増加したためである。さらに、 $\omega = 71$ 付近において、一様圧縮では見られなかった (1,2) モードの主共振応答が顕著に現れていることが分かる。これは、非対称拘束により (1,2) モードの節が移動し、対称モードである (1,1) モードが連成するため、対称加振によって励起された。この範囲を拡大した図を下に示す。各測定点で、(1,1) モードの非共振応答振幅よりも (1,2) モードの主共振応答振幅が小さい部分が存在する。これは (1,1) モードの非共振応答に対して、(1,2) モードの主共振応答が逆相となっているためである。また、測定点 (a) と (b) では (1,2) モードの主共振応答の形が左

Fig. 3 Frequency response curves and detailed view of (1,2) mode with asymmetric constraints at the measurement point (a) $\xi = 0.6, \eta = 0.6$ and (b) $\xi = 0.6, \eta = 0.4$

右対称になっている。これは、非対称モードである (1,2) モードの節を境に対称な測定点 (a) と (b) において、周期加振加速度に対する各測定点での応答が互いに逆相になるためである。

次に、(1,2) モードの主共振応答に対する周波数応答曲線の傾向を調べるため、(1,2) モードに対応する減衰比を $\varepsilon_3 = 0$ として、非線形自由振動における振動数と振幅の関係である背骨曲線を求めた。 ξ 方向の一様圧縮に加え、非対称圧縮変位 u_{0ma}, u_{0pa} を変化させた場合において、各測定点における (1,2) モードの背骨曲線を図 4 に示す。測定点 (a), (b) とともに漸軟-漸硬形の応答を示している。また、非対称拘束変位を増加させると、(1,2) モードの固有振動数が増加するため、応答全体が高振動数側へ移動している。漸硬部分の応答は、非対称拘束変位が増加すると応答振幅も増加し、各応答が重なっている。これは、非対称拘束の中心である $\eta = 1/2$ の位置では拘束を受けず、 $0 \leq \eta < 0.5$ および $0.5 < \eta \leq 1$ の範囲で面内拘束を受けるため、板の ξ 方向に 1 本の節をもつ (1,2) モードの振動応答が誘起されやすくなり、応答振幅が増加したと考えられる。

Fig. 4 Backbone curves of (1,2) mode with asymmetric constraints
and $\varepsilon_3 = 0$ measured at (a) $\xi = 0.6, \eta = 0.6$ and (b) $\xi = 0.6, \eta = 0.4$

3・3 非周期応答

ξ 方向の一様圧縮に加え、非対称圧縮変位 $u_{0ma} = -400, u_{0pa} = 400$ を与えた場合の周波数応答曲線について、調和バランス法により求めた周期応答、およびルンゲ-クッタ-ギル法で計算した非周期応答を含む結果を図 5 に示す。調和バランス法による結果を赤の太線で、ルンゲ-クッタ-ギル法で周波数を増加させながら掃引した場合の結果を青の一点鎖線で、また周波数を減少させながら掃引させた場合の結果を青の細線でそれぞれ表している。図に示す (1,1:1) は (1,1) モードの主共振応答、(1,1:1/2) は (1,1) モードの 1/2 次の分数次調波共振応答の周期解を表している。また、横軸上に線形の固有振動数を示した。調和バランス法とルンゲ-クッタ-ギル法による

Fig. 5 Frequency response curves with asymmetric constraints $u_{0ma} = -400, u_{0pa} = 400$
measured at $\xi = 0.6, \eta = 0.6$

結果を比べると、掃引周波数の増加方向と減少方向で異なる応答が起こっていることから、ヒステリシスが確認できる。また、ルンゲ-クッタ-ギル法による計算結果より、 $\omega = 30$ より低い周波数領域および (1,1) モードの主共振応答から 1/2 次の分数次調波共振応答に跳躍する直前の $\omega = 47 \sim 51$ の領域において、非周期応答が発生している。このうち $\omega = 15.5$ での時系列波形、周波数分析結果およびポアンカレ写像図をそれぞれ図 6 (a) ~ (c) に示す。図 6 (a) の縦軸は無次元動変位 $\tilde{w}$ 、横軸は加振周期 τ_c を基準とした周期数であり、図 6 (b) の縦軸は振幅スペクトルのデシベル値、横軸は無次元分析周波数 ω_{sp} である。また、図 6 (c) の縦軸は無次元速度 $\tilde{w}_{dot}$ 、横軸は無次元動変位 $\tilde{w}$ である。図 6 (a) から、時系列波形の包絡線が変化した不規則な応答が確認できる。また、図 6 (b) の周波数分析結果では、加振振動数 $\omega_{ex} = 15.5$ の定数倍の $2\omega_{ex}$, $3\omega_{ex}$ などの振動数成分の他に $\omega_{ex}/2, (3/2)\omega_{ex}$ に大きなピークが存在している。また、加振加速度の最大振幅からの位相 $\theta = 0^\circ$ で記録した図 6 (c) のポアンカレ写像図では、応答の点列が相図上に広がり、周期応答には無い特徴的な写像が見られることから、カオス振動応答の発生が確認できる。

Fig. 6 (a)Time history, (b)frequency spectrum and (c)Poincaré projection of the non-periodic response, $\omega = 15.5$, measured at $\xi = 0.6, \eta = 0.6$

7. 結 語

面内に非対称弾性拘束を受ける長方形平板の非線形振動について理論解析を行った。板に一樣の面内圧縮を加えた状態から非対称拘束変位を増加させた場合に得られた結果を以下に示す。

- (1) 固有振動モードでは、非対称拘束を与える軸と直交する面内方向に、最大振幅位置や節が移動した。
 - (2) 静的復元力特性では、負の勾配が急になり、飛び移り後の静たわみは、非対称拘束の引張り側の測定点では減少し、圧縮側の測定点では増加した。
 - (3) 周波数応答曲線では、(1,1) モードの漸軟性が強まり、漸硬部分の応答は、非対称拘束の引張り側の測定点では振幅は減少し、圧縮側の測定点では増加した。また、(1,2)モードの主共振応答が顕著に現れた。
- 今後、面内非対称拘束の増加によるカオス振動応答の特性の変化を調べる予定である。

文 献

- (1) K. Nagai, S. Maruyama, T. Murata, T. Yamaguchi, "Experiments and analysis on chaotic vibrations of a shallow cylindrical shell-panel", *Journal of Sound and Vibration* 305 (2007) pp. 492-520.
- (2) S. Maruyama, K. Nagai, Y. Tsuruta, "Modal interaction in chaotic vibrations of a shallow double-curved shell-panel", *Journal of Sound and Vibrations* 315 (2008) pp. 607-625
- (3) T. Yamaguchi, K. Nagai, "Chaotic Vibrations of a Cylindrical Shell-Panel with an In-Plane Elastic-Support at Boundary", *Nonlinear Dynamics* 13 (1997) pp. 259-277.
- (4) 小野里直樹, 丸山真一, 永井健一, 山口誉夫, 黒澤正樹, "固定辺で面内弾性拘束を受ける長方形板のカオス振動実験", 日本機械学会論文集 (C 編) 75 巻 753 号 (2009-5), 論文 No. 08-0910
- (5) 柳澤大, 永井健一, 丸山真一, "固定-単純支持はりのカオス振動に及ぼす軸圧縮荷重の影響", 日本機械学会論文集 (C 編) 74 巻 741 号 (2008-5), 論文 No. 07-0951