高次スペクトルを用いた振動系における実験解析

○正 松本 宏行（ものづくり大），大石 久己（工学院大），山川 新二（工学院大），
芝崎 達朗（工学院大），村岡 広基（工学院大）

Experimental analysis by higher order spectra

Hiroyuki MATSUMOTO, Hisami OHISHI, Shinji YAMAKAWA, Tatsuro SHIBAZAKI
and Hiroki MURAOKA

Institute of Technologists, Dept. of Manufacturing
Maeya333, Gyoda, Saitama, 361-0038 Japan

We suggested a Higher Order Spectra(HOS) as new identification technique in the non-linear vibration system to receive irregularity input. we carry out an experiment non-linear vibration using the HOS and analyzed it and produce the improvement model with the magnet as an experiment model, and we performed the examination, and these are the main point of this report.

Key Words :Higher -order -Spectra, Bispectrum, Nonlinear vibration ,Random vibration,
Identification

1. 緒 言

機械構造物に存在する現象はガタ、摩擦などの非線形特性を有するものが多く、不規則入力を受ける振動系の応答特性は「くせ」のあるいわゆる非ガウス性(non-gaussian)の不規則過程となる。これらのデータの取り扱いには統計的手法の適用、さらには非ガウス性を考慮した高次統計量(higher order statistics)を用いた解析が必要不可欠である。

本報告では、筆者たちが不規則入力を受ける非線形振動系における新しい同定手法として提案してきた高次スペクトル(Higher Order Spectra:HOS)を用いた非線形振動系の実験解析を行った。今回は、実験モデルとして、磁気による反発特性を考慮した改良モデルを製作し、入力としてサイン波およびランダム加振の実験を行い、本手法の有効性および検討を行った。これらが今回の報告の骨子である。

2. 高次スペクトル

高次スペクトルは、元々は高次のキュムラントの多重フーリエ変換で定義されるが、実際の計算では、データの対象性や計算時間などを考慮して、フーリエスペクトルの高次積で算出することが多い。また、これらのデータ処理については、前処理やウインドウを掛けたりなどの統計的なデータを精度良くかつ統計的な誤差を考慮して算出することが重要である。

また、高次元のデータ処理となるので、実際の結果を図示化する場合については、必要とする周波数間の関係を定め、その周波数成分間の断面図などを選び、適宜データの低次元化を図ることも必要である。今回の報告では、高次スペクトルの一つであるバイスペクトルにトリススペクトルについて取り上げる。

バイスペクトルとは、「二つの周波数のスペクトル」という意味である(1)。パワースペクトルが相関関数のフーリエ変換で表されるのに比べて、バイスペクトルは、三次の相関関数の二重フーリエ変換として定義される。

$$B(f_1, f_2) = \frac{1}{T} E[X(f_1)X(f_2)X^*(f_1 + f_2)] \quad \dots (1)$$

ここで、* は複素共役数をあらわす。

バイスペクトルは2次の周波数スペクトルを有し、かつそれぞれの従属関係が存在するときに値に意味をもつ。上記は一つの変量を取り扱ったもので、オートバイスペクトル (auto bispectrum) という。また入出力相互の非線形伝達特性をあらわしたものをクロスバイスペクトル (cross bispectrum) という。

その特徴の一つは、着目している周波数成分間の従属関係を示していることにある。

これは非線形振動系における高調波、分数調波振動などの主共振の周波数を中心として、他の周波数成分を含む場合に有効な手法となる。

これらの周波数成分間の特性を示すために、より厳密な形式でスペクトルを論じることが必要である。

時間データを Foulmer-Stieltjes (フーリエ・スチエルチェス) 変換を用いて次式のように表示する (2)。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dX(\omega) e^{j\omega t} \quad \dots (2)$$

パワースペクトルは、成分を用いることにより、

$$\langle dX(\omega_1)dX(\omega_2) \rangle = \begin{cases} P(\omega) & (\omega_1 + \omega_2 = 0) \\ 0 & (\omega_1 + \omega_2 \neq 0) \end{cases} \quad \dots (3)$$

となる。つまり、パワースペクトルは、2つの周波数成分の依存性を保持しているが、物理的に等価な正、負それぞれの周波数成分同士についての関係を議論していることになる。よって、単一の周波数成分のみの特性に限定されるのである。次に、バイスペクトルについても同様の形式で表現すると次の(4)式になる。

$$\langle dX(\omega_1)dX(\omega_2)dX(\omega_3) \rangle = \begin{cases} B(\omega) & (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0) \\ 0 & (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \neq 0) \end{cases} \quad \dots (4)$$

周波数表示にした場合、

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

の場合に値をもつことになる。ここでは、文献(2)に従って、円振動数の表現で示している。周波数でも同様に定式化できる。周波数について考慮すると、バイスペクトルが値を持つ場合は3つめの周波数に注目して、

$$f_1 + f_2 + (-f_1 - f_2) = 0$$

とし、3つの周波数の組を考えると2つの周波数成分間の従属性を明確にすることが可能である。さらに置き換えることで2倍の高調波成分の従属性も具体的に値を有することになる。

位相がランダムな場合については、バイスペクトルの値は平均化の過程で値を持たないが、各周波数成分間に従属性を持ち、なおかつ位相関係が結合している場合にはバイスペクトルは値を有する。パワースペクトルなどにはないバイスペクトルの特徴の一つである。

また、バイスペクトル自身が値の大きさに依存しないようにパワースペクトルで除して基準化したものを用いて考察を行う場合もある。

著者らは、これを「ひずみ度関数」として名づけている。次式がその定義式である。

$$S(f_1, f_2) = k \frac{B(f_1, f_2)}{\sqrt{P(f_1)P(f_2)P(f_1 + f_2)}} \quad \dots (5)$$

係数kを1として解析に利用している。類似の概念として、バイコヒーレンシという定義もある。

著者らは、非線形振動系においてガタを持つ非線形、片側飽和特性など復元力において非線形特性を有する代表的なモデルについて考察を行ってきた。(3), (4) 高次スペクトルは、元々は高次のキュムラントの多重フーリエ変換で定義されるが、実際の計算では、データの対象性や計算時間などを考慮して、フーリエスペクトルの高次積で算出することが多い。

また、これらのデータ処理については、前処理やウインドウを掛けたりなどの統計的なデータを精度良くかつ統計的な誤差を考慮して算出することが重要である。さらに一つ次数の高い、高次のスペクトルとしてトリスペクトルは、

$$T(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{T} E[X(f_1)X(f_2)X(f_3)X^*(f_1 + f_2 + f_3)]$$

として定義される。

バイスペクトルと同様にして周波数同士の組み合わせに注目すると、

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$$

のときにトリスペクトルは値を持つ。3つの周波数間の従属性を議論していることになる。

もちろん、トリスペクトルは高次元で表示されることになるので計算結果そのままでは、値の評価はわかりにくいことになる。具体的には、注目した周波数成分の組み合わせを眺めて、次元を下げて議論するのがよい。

非対称特性には偶数次を有するバイスペクトル解析が有効であり、もし、対象型非線形特性を考慮する場合にはバイスペクトルは値を持たない。このような場合にはトリスペクトルが有効である。

対称、非対称を包含する幅広いクラスの前線形特性を考慮することが可能であるといえる。

3. 実験モデルについて(磁気による反発)

3. 1 磁気反発モデル

今回の報告では、磁石による反発力を利用した実験モデルを製作した(図1)。以前に製作したモデルより、可動質量部について軽量化を図っている。

Fig. 1 Experimental model

可動部分中央に1対および円周部分に2対のネオジウム磁石を取り付けている。直径が20mm、14mm 厚みが10mm (共通)、磁化方向は厚み方向、表面磁束密度は430mT, 480mT, 吸着力10000g, 6400g, 質量が23.55g, 11.54gである。また、可動部および基礎部の質量はそれぞれ320g, 1426gである。磁石間の距離は静止時において43.25mmとして固定して実験を行った。実験測定装置を図2に示す。

入力データは、FFTアナライザにおいて生成され増幅器を通じてサイン波（あるいはランダム波）を入力として基礎側へ加える。そして、基礎側と可動部においては、ねじで締結された加速度ピックアップより加速度データがそれぞれ測定される。そのデータをもとにしてデータ処理を行った。

Fig. 2 Experimental apparatus

4. 実験結果

3. 2 サイン波スイープ実験

サイン波の出力電圧として2V, 5V, 8Vとして3Hzから12Hzを周波数範囲として上昇および下降スイープ加振を行った。周波数応答関数を図3に示す。横軸は周波数、縦軸は基礎側の加速度を基準として可動部の加速度データとの比として示している。

Fig. 3 Nonlinear-FRF

Fig. 4 Curve-Fitting(Stiffness)

共振曲線は左に傾く非線形特性として特徴的な「ソフトばね」の傾向を示していることがわかる。

つぎに、磁石による反発力に相当する非線形剛性（ばね定数）を実験により推定した。磁石間距離と荷重との関係を図4のようにプロットしてカーブフィット（曲線適合）を行った。主な特徴としては、変位の5乗項までを含めた推定がもっとも当てはまりが良いようである（残差二乗和：R2値として0.998）。

3. 3 ランダム加振実験

ランダム波を入力してそのときの実験結果をまとめた。図5にパワースペクトル結果を示す。

主共振ピークは5Hz近辺そして低次の2Hz近辺にもピークが存在していることがわかる。

出力電圧を2V, 5V, 8Vなどと大きくしていくとわずかながら主共振ピークは5.5Hzから5.2Hzへと低い周波数へ移動していくことも観察された。

Fig. 5 Power Spectrum

3.4 バイスペクトル解析による考察

一例として、入力電圧が5Vのときの基礎側（下段）、可動部側（上段）の加速度波形を図6に示す。次に、応答加速度（相対）についてバイスペクトル解析（振幅の絶対値）を行った（図7）。二つの周波数軸として大きさを高さ方向の軸として表示している。上方からみた等高線図をあわせて図8に表示する。

Fig. 6 Time of history data

Fig. 7 Bispectrum(Magnitude)

Fig. 8 Contour map(Bispectrum)

基本波と2倍周波数の関係を考察するため出力電圧（2V, 5V, 8V）と変化したときのひずみ度関数を図9に示す。これらの結果を考察すると、およそ2Hz, 5Hzおよび7Hz付近との間で和差調和波に相当する周波数成分間の従属性がランダム入力による高次スペクトル解析から明らかになった。

Fig. 9 Skewness Function

4. 実験モデルについて（ストップ付きモデル）

4.1 ストップ付きモデル

本研究で用いるストップ付きモデルを説明する（図 10）。このモデルは、加振機側プレート（以後、加振機側とする）と主軸、金属ばね、応答側プレート（以後、応答側プレートとする）、ゴム製ストップとストップ台座、ばね固定治具で構成されている。

金属ばねの上端を応答側に固定し、下端を加振機側に固定した。主軸にねじ加工を施し、ストップ台座の高さが自由に変えられる。加振すると応答側が変位し、金属ばね内部のストップに衝突する。

Fig. 10 Experimental Model (Magnetic model)

4.2 実験結果

サインスイープ加振を行い、出力電圧を 0.7V から 2.5V までの変化させたときの応答側データの結果を図 11 に示す。電圧の大きさが大きくなるのに対応して、共振周波数の位置が高い周波数側へシフトすることが図よりわかる。これらのことにより、ハードばねの傾向をしめしていることが推察される。

Fig. 11 Sine sweep (Magnetic model)

つぎに、バースペクトル解析の結果を示す。ランダムデータをこの実験モデルに加えた。出力電圧を変化させたときのバースペクトルおよびひずみ度関数の結果をまとめた。電圧が 7V のときのバースペクトルおよびひずみ度関数の結果を図 12 および図 13 に示す。

Fig. 12 Bispectrum (Magnetic model)

Fig. 13 Skewness function (Magnetic model)

4Hz 付近にひずみ関数のピークが目立つことから 4Hz と 8Hz の間に周波数成分の従属性があることがわかる。その他、2 倍の関係のみならず、3 倍の周波数成分についても従属性があることがいえる。出力電圧については上昇させた影響を考察したが、大幅に共振周波数ピークが移動することはなかった。

5. まとめ

磁気による反発力およびストップ付きモデルを非線形特性として有する 2 つの実験モデルを製作し、高次スペクトル解析の一つであるバイスペクトルにより周波数成分間の従属性を明らかにした。実稼働時における不規則データに埋もれていても特徴のあるデータを抽出できる利点を生かし、さらなる有効性を提示するとともに多くの非線形モデルへの検討を行っていく。

文 献

- (1) 松本, 山川, 大石 : 機論 C 編, 62 巻 604 号
- (2) 日野幹雄 : スペクトル解析, 朝倉書店, p 246-p 254.
- (3) 松本, 山川, 大石 : D&D2010
- (4) 芝崎, 2010 年度工学院大学卒業論文, 2011
- (5) 村岡, 2010 年度工学院大学卒業論文, 2011