一次元構造物における波動的観点からの固有振動の設計*

谷田 涼^{*1}, 松村 雄一^{*2}

Design of natural vibration of one-dimensional structure from the viewpoint of wave approach

Ryo TANIDA^{*1}, Yuichi MATSUMURA^{*2}

^{*1}University of Yamanashi, Dept. of Mechanical Systems Engineering
4-3-11 Takeda, Kofu, Yamanashi, 400-8511 Japan

Eigenfrequencies of the structures which are modified by design changes are generally different from those of original structures, because the phase and amplitude of waves are changed by the modification of cross-section and discontinuities of waveguides. This paper shows sensitivity of an eigenfrequency to modification is determined by the phase of waves around over the modified structure at a frequency corresponding to the eigenfrequency of the original structure. Firstly, it is shown that an eigenfrequency of a one-dimensional structure which is coupled by two different cross-sectional rods can be calculated by wave approach. The method is then verified by comparing eigenfrequencies calculated by the method with those analyzed by primary theory of rods, and with those computed by finite element model. Finally, the mechanism of determination of eigenfrequency is explained by the viewpoint of the phase changes of each wave.

Key Words: Wave Analysis, Numerical Analysis, Boundary Condition, Natural Frequency, Computational Method

1. 結 言

はりや棒として、一次元のモデル化手法が適用できる機械構造物は多い。このような一次元構造物を対象に、端部や不連続部での波動の反射係数、透過係数や、波動が構造物内を伝播する際の振幅と位相の変化に着目して、固有振動数を求める方法⁽¹⁾がある。また、この考え方を基礎として、徐々に断面積が変化する一次元構造物の波数と固有振動数の変化をパワー法で求める方法⁽²⁾もある。また、境界部に質量やバネなどを付加することによる波動の位相変化に着目し、任意の周波数帯域内にあるモード数を求める研究^{(3),(4)}もある。しかし、相異なる様な構造物をつなぎ合わせた一次元構造物に対して、波動の振幅と位相の変化に着目し、固有振動数を算出する研究は見当たらない。

本論文では相異なる二つの一次元導波管が接続された系を対象に、波動の振幅と位相に着目して、構造変更によって固有振動数が変化するメカニズムを示す。波動は導波路を経由して、再び元の位置に戻るときに振幅と位相が変化する。ある周波数の波動が様々な導波路を経由して元の位置に戻る際に、重ねあわされた波動の振幅と位相が、導波路を一周する前の波動の振幅と位相に一致する場合、この周波数が固有振動数となる。構造変更は、導波路の断面の変化によって波数を変化させたり、不連続部における反射や透過の特性を変化させたりする。これらの変化は、波動の振幅と位相の変化を引き起こし、固有振動数が変化する。本論文の構成は以下の通りである。はじめに、二つの様な導波管を接続した一次元構造物において、端部での波動の反射と二つの導波管の不連続部における波動の反射と透過、導波管内を伝わる波動の伝播による位相変化に着目するだけで、簡便に固有振動数の算出が行えることを示す。波動的に求めた固有振動数を、棒の初等理論と有限要素法によって求めた固有振動数と比較することで、本手法を用いた固有振動数の算出方法の妥当性を検証する。次に、片方の導波管の断面積を変化させた場合の数値解析例を通し、固有振動数が変化するメカニズムを説明する。最後に、このメカニズムに基づき、任意の固有振動数を実現するためには、波動の位相を設計すればよいことを示す。

2. 異なる一様な導波管が接続された系における固有振動の生成条件

本章では、相異なる二つの一様な一次元導波管を接続した場合の固有振動の生成メカニズムを波動的に説明するとともに、固有振動数を算出する方法についても示す。図1に示すように、各々の導波管内の波動を任意の位置における波動の変位振幅で表わす。不減衰を仮定すれば、振幅は変化していることがわかる。波動が構造物内を一周する際の、波動が伝播する際の距離による位相変化と、不連続部における反射と透過による位相変化、端部における反射による位相変化の総和が、 2π の整数倍になると、波動が完全に重ね合わされて固有振動が発生する。従って、この条件から固有振動数を算出でできることがわかる。

棒の縦波を例に、波動的観点からの固有振動数の算出方法を示す。棒に周波数 ω の波が発生した場合を考えると、図1のそれぞれの部材における変位の複素振幅は次式で示される。

$$u_1(x_1) = a_1 e^{-jk_1 x_1} + b_1 e^{+jk_1 x_1}, \quad u_2(x_2) = a_2 e^{-jk_2 x_2} + b_2 e^{+jk_2 x_2} \quad (1.a,b)$$

ここで、波数 k は、波動が伝播する際の単位長さあたりの位相変化を示し、周波数依存の関数である。

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \omega, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \omega \quad (2.a,b)$$

外力が与えられない場合、位置 A,B,C における波動振幅の相互関係は、次式のように得られる。

$$a_1(L_1) = G_{a1} \cdot a_1(0), \quad b_1(0) = G_{b1} \cdot b_1(L_1) \quad (3.a,b)$$

$$a_2(L_2) = G_{a2} \cdot a_2(L_1), \quad b_2(L_1) = G_{b2} \cdot b_2(L_2) \quad (4.a,b)$$

ここで、 $\mathbf{G}$ は伝播距離 x による位相変化を表わし、添字 a は、前進波の振幅に関係すること、添字 b は、後退波の振幅に関係することを示す。

$$G_{a1} = e^{-jk_1 L_1}, \quad G_{b1} = e^{+jk_1 L_1} \quad (5.a,b)$$

$$G_{a2} = e^{-jk_2 L_2}, \quad G_{b2} = e^{+jk_2 L_2} \quad (6.a,b)$$

Fig.1 Propagation Wave

2・1 不連続部や端部における波動の反射・透過

本節では、構造物の両端とそれぞれの導波管の接合部における透過係数・反射係数を求める。はじめに、端部での反射係数を求める。両端部への入射波と反射波を用いることで、反射係数を次式のように定義できる。

$$\mathbf{a}_1(0) = \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{b}_1(0) \quad , \quad \mathbf{b}_2(L_2) = \mathbf{r}_C \cdot \mathbf{a}_2(L_2) \quad (7.a,b)$$

ここに、 $\mathbf{r}$ は反射係数行列を表わし、添字は反射する位置を示す。

次に、不連続部における反射係数と透過係数を求める。不連続部 $B(x=L_1)$ での反射係数 $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{21}$ と、透過係数 $\mathbf{t}_{12}, \mathbf{t}_{21}$ は、不連続部への入射波と反射波の関係から定義される。

$$\mathbf{a}_2(L_1) = \mathbf{r}_{21} \cdot \mathbf{b}_2(L_1) \quad , \quad \mathbf{b}_1(L_1) = \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{a}_1(L_1) \quad (8.a,b)$$

$$\mathbf{a}_2(L_1) = \mathbf{t}_{12} \cdot \mathbf{a}_1(L_1) \quad , \quad \mathbf{b}_1(L_1) = \mathbf{t}_{21} \cdot \mathbf{b}_2(L_1) \quad (9.a,b)$$

ここに、例えば $\mathbf{r}_{12}$ の添字は、波動が部材1から2に向かって進む波動が反射することを示す。

一例として、図1で示すように、途中で直径が変化する棒の不連続部における縦波の反射係数と透過係数を求める。角周波数 ω の振幅 a_1 の縦波が、不連続部Bに入射し、振幅 b_1 の反射波と振幅 a_2 の透過波を発生させるとする。ここで変位の位置を x として棒各部の縦変位は次式のように表わせる。

$$u_1(x) = a_1 e^{-jk_1 x} + b_1 e^{+jk_1 x} \quad (x < L_1) \quad (10)$$

$$u_2(x) = a_2 e^{-jk_2 x} \quad (x > L_1) \quad (11)$$

微小ひずみの定義とフックの法則より、軸方向における力は次式のようにあらわされる。

$$F_1(x) = A_1 \sigma_1 = -E_1 A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -EA_1 (jka_1 e^{-jkx} - jkb_1 e^{+jkx}) \quad (x < L_1) \quad (12)$$

$$F_2(x) = A_2 \sigma_2 = -E_2 A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -EA_2 (jka_2 e^{-jkx}) \quad (x > L_1) \quad (13)$$

変位の連続性から次式を得る。

$$a_1 + b_1 = a_2 \quad (14)$$

また、力のつり合いは次式のようにあらわされる。

$$-EA_1(jka_1 - jkb_1) = -EA_2(jka_2) \quad (15)$$

式(14),(15)より、縦波の反射係数と透過係数がそれぞれ求まる。

$$\mathbf{t}_{12} = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \quad (16)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \quad (17)$$

$$\mathbf{t}_{21} = \frac{2A_2}{A_1 + A_2} \quad (18)$$

$$\mathbf{r}_{21} = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} \quad (19)$$

2・2 固有振動の生成条件

相異なる二つの一様な一次元導波管を接続した系の固有振動数を，波動的に求める手法について説明する．まず，導波管 1 と 2 の間の不連続部で行き来する波動の反射と透過は，式(8)，(9)より，次式のように表わすことができる．

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{12} & \mathbf{t}_{21} \\ \mathbf{t}_{12} & \mathbf{r}_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

また，不連続部から出た波動が，個々の導波管上を伝播して，両端で反射して再び不連続部に戻ってくるまでの変化は，次のように示すことができる．

$$\text{媒質 1 : } \mathbf{a}_1 = \mathbf{G}_{a1}(L_1) \cdot \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{G}_{b1}(L_1)^{-1} \cdot \mathbf{b}_1 \quad (21)$$

$$\text{媒質 2 : } \mathbf{b}_2 = \mathbf{G}_{b2}(L_2)^{-1} \cdot \mathbf{r}_C \cdot \mathbf{G}_{a2}(L_2) \cdot \mathbf{a}_2 \quad (22)$$

式(20)～(22)をまとめると，次式のように表せる．

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

ここに，A, B, C, D は以下の行列であり，波動が元の位置に戻るまでの振幅と位相の変化量を表わす．

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{G}_{a1}(L_1) \cdot \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{G}_{b1}(L_1)^{-1} \\ \mathbf{B} &\equiv \mathbf{t}_{21} \cdot \mathbf{G}_{b2}(L_2)^{-1} \cdot \mathbf{r}_C \cdot \mathbf{G}_{a2}(L_2) \\ \mathbf{C} &\equiv \mathbf{t}_{12} \cdot \mathbf{G}_{a1}(L_1) \cdot \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{G}_{b1}(L_1)^{-1} \\ \mathbf{D} &\equiv \mathbf{r}_{21} \cdot \mathbf{G}_{b2}(L_2)^{-1} \cdot \mathbf{r}_C \cdot \mathbf{G}_{a2}(L_2) \end{aligned} \right\} \quad (24a,b,c,d)$$

不減衰系において、ある特定の周波数で波動の重ね合わせが定在波となる条件は、任意の位置の波動の複素振幅が、様々な導波路を一周してきた後にも同振幅となることであるので、

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1' \\ \mathbf{a}_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{b}_1' = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 \end{cases} \quad (25)$$

従って、

$$\mathbf{b}_1' = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{b}_1 \quad (26)$$

$$\mathbf{a}_2' = (\mathbf{C} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{a}_2 \quad (27)$$

式(26),(27)より、自明でない解の存在条件は、

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}| \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \quad (28)$$

$$|\mathbf{C} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} - \mathbf{I}| \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \quad (29)$$

以上より、波動が同振幅、同位相で再び元の位置に戻ってくる条件を求めることで、固有振動数を導出できる。例えば、本式の左辺の係数行列の第1項 $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{C}$ の特異値分解を行い、零空間を探索することで固有振動数を算出できる。もしくは、係数行列部 $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}$ の固有値分解を行い、固有値の実部が1、虚部が0となる条件を探索することで固有振動数を算出できる。

3. 波動的観点に基づく固有振動数算出法の妥当性

本章では、断面積が異なる二つの棒を接続した系を対象に、前章で示した手法に基づいて固有振動数を求め、有限要素法等で求めた固有振動数などと比較検証する。はじめに、表1に示すような同じ断面積で結合された鋳鉄の棒を対象とした解析例を示す。境界条件は両端固定、周波数解像度は30kHzとする。有限要素モデルは、棒の初等理論から得られる動剛性行列を用いて作成した。

図2に、対象系から求めた式(28)の係数行列第1項 $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{C}$ に対して、周波数を変化させながら特異値を求めた結果を示す。本図において、図中に丸で示した特異値が零となるところが固有振動数に対応する。図2から求めた固有振動数と、棒の初等理論と有限要素法から求めた固有振動数を表2に示す。本表より、同材料、同断面積であれば、いずれの手法を用いても同じ固有振動数が得られることが確認できる。従って、本手法を用いた場合の固有振動解析手法の妥当性が確認される。

図3には、式(28)の係数行列部 $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}$ の固有値分解から求めた固有値の中で、1次から5次の固有振動数に対応する固有値を複素空間で表示した結果を示す。本図より、すべての固有振動数において、複素固有値の実部が1、虚部が0となっている。複素数の絶対値が1、偏角が0であることから、この結果は波動が導波路を一周しても同振幅、同位相で元の位置に戻ってくることを意味している。不減衰系の場合、波動の振幅は変化しないことから、複素固有値の絶対値は、固有振動数でない周波数においても常に1に保たれるが、偏角は変化する。従って、この偏角を注視することで、その周波数が固有振動数からどの程度離れているのかを確認できたり、構造変更による偏角の感度を調べることで構造変更による固有振動数の感度を調べたりできる可能性がある。

Table1 Model No.1

	Structure 1	Structure 2
Material property	Steel (Young's ratio:206GPa, Density:7.86kg/m ³)	Steel (Young's ratio:206GPa, Density:7.86kg/m ³)
Diameter/Length	ϕ 0.02/0.3m	ϕ 0.02/0.7m
Analysis Model	<div><div><div><div>$x = 0$</div><div>$x = 0.3$</div><div>$x = 1$</div></div><div><div>1</div><div>2</div></div></div></div>	

Table2 Eigenfrequency for model No.1

	Wave Approach [kHz]	Elementary [kHz]	FEM [kHz]		Wave Approach [kHz]	Elementary [kHz]	FEM [kHz]
1 st	2.560	2.559	2.560	6 th	15.358	15.358	15.358
2 nd	5.119	5.119	5.119	7 th	17.918	17.918	17.918
3 rd	7.679	7.679	7.679	8 th	20.478	20.478	20.478
4 th	10.239	10.239	10.239	9 th	23.037	23.037	23.037
5 th	12.799	12.799	12.799	10 th	25.597	25.597	25.597

Fig.2 Singular Values for the model No.1

Fig.3 Complex eigenvalues for natural frequencies

4. 断面積変化による固有振動数変化

本章では、断面積を変化させた場合に固有振動数が変化するメカニズムを、前章で定義した複素固有値を用いて波動的観点から説明する。

4・1 断面積変化による固有振動数の変化傾向

断面積を種々に変化させた場合の固有振動数の変化傾向について調べる。解析条件は前節と同様にし、部材1の断面積は変化させずに、部材2の断面積を変化させる。ここで、断面積比は（部材2/部材1）とする。図4より、断面積を変化させることによって、固有振動数が変化することが確認できる。断面積比が1よりも大きくなる場合、1次と4次、7次と8次の固有振動数が減少、2次と3次、6次と9次の固有振動数が増加、5次と10次の固有振動数は変化しないことがわかる。逆に、断面積比が1よりも小さくなる場合は、1次と4次、7次と8次固有振動数が増加、2次と3次、6次と9次の固有振動数が減少、5次と10次の固有振動数は変化しないことがわかる。

4・2 断面積変化による固有振動数の変化メカニズム

固有振動数の変化を波動的観点から説明する。表3に示すような同材料で異なる断面積をもつ部材を結合させた場合を対象とする。解析条件は前節と同様にし、有限要素法による固有振動解析も行い、断面積変化を伴う場合においても、本手法が妥当であるかを検討する。そして、複素固有値を調べ、固有振動の変化するメカニズムについて述べる。表1の棒を、表3の棒に設計変更したとする。このとき、表1の棒の固有振動数であった振動数では、振動が同振幅、同位相で元に戻るという条件が満たされなくなり、別の周波数で、この条件が満たされるようになるはずである。この結果として固有振動数が変化するメカニズムを以下に解き明かす。

Fig.4 Eigenfrequency versus diameter ratio

Table3 Model No.2

	Structure 1	Structure 2
Material property	Steel(Young's ratio:206GPa, Density:7.86kg/m ³)	Steel(Young's ratio:206GPa, Density:7.86kg/m ³)
Diameter/Length	φ 0.02/0.3m	φ 0.04/0.7m
Analysis Model	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $x = 0$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 5px auto; width: 40px; text-align: center;">1</div> </div> <div style="text-align: center;"> $x = 0.3$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 5px auto; width: 100px; text-align: center;">2</div> </div> <div style="text-align: center;"> $x = 1$ </div> </div>	

図5に、構造物全体における特異値を示す。特異値が零となるところが固有振動数となることがわかる。図5より、断面積が変化した際の構造物全体の固有振動数は、図2に示した同一断面の時と変化していることがわかる。また、表4に、異なる断面積を組み合わせた場合において、本手法と有限要素法の解析結果を示す。表より、有限要素法による解析結果と一致していることが確認でき、断面積変化を伴う際においても、本手法の妥当性を確認できる。

複素固有値の位相変化から振動数が変化するメカニズムを示す。図6に、断面積を変化させた際の反射・透過係数のボード線図を示す。本図より、反射と透過係数の構造変更前後のゲインと位相変化がわかる。構造変更後（断面積比=2）と構造変更前（断面積比=1）のボード線図を比較すると、構造変更前の反射のゲインは無限大に小さくなり、位相は 0° を示し、透過のゲインは0dBであり、位相は常に 0° を示す。構造変更後の反射のゲインは-4dB、位相は細い方から太い方へは反転し、太い方から細い方へは同位相のままである。透過のゲインは、細い方から太い方へは4dB、太い方から細い方へは-8dBを示す。反射と透過による合成された波動の位相は、構造変更前の固有振動数において、図7の位相変化となる。本図より、構造変更前の一次固有振動数において、断面積変化を伴う際の複素固有値に着目すると、複素固有値の虚数が負の方向に傾いていることがわかる。また、二次固有振動数における複素固有値に着目すると、複素固有値の虚数が正の方向に傾いていることがわかる。波動の位相は、振動数が増加することにより複素固有値の虚数が負の方向へ傾き、逆に、振動数が減少することにより複素固有値の虚数が正の方向へと傾く。従って、一次固有振動数は振動数が減少することで、二次固有振動数は振動数が増加することで、固有振動が生成される同振幅、同位相の条件を満たし、断面積変化する際の固有振動数となる。図4より、断面積比が2となると、一次固有振動数は減少する傾向にあり、二次固有振動数は増加する傾向にあることが確認できる。同様に、三次の固有振動数は振動数が増加し、四次の固有振動数も振動数が減少する。五次の固有振動数においては、複素固有値の位相に変化がなく、常に位相が揃っているため、固有振動数は変化しないことがわかる。

従って、固有振動数を任意に変化させるためには、反射、透過、伝播を変化させるように構造変更を行い、波動の位相を正、もしくは負の方向に変化させればよい。波動の位相に着目して、任意の固有振動数に波動の反射と透過、伝播を変化させる構造変更を行うことで、固有振動数を設計することができる。

Table4 Eigenfrequency for model No.2

	Wave Approach [kHz]	FEM [kHz]		Wave Approach [kHz]	FEM [kHz]
1 st	2.115	2.117	6 th	15.881	15.882
2 nd	5.363	5.360	7 th	17.552	17.556
3 rd	8.044	8.046	8 th	20.237	20.232
4 th	9.714	9.716	9 th	23.480	23.477
5 th	12.799	12.796	10 th	25.598	25.605

Fig.5 Singular Values for the model for model No.2

Fig.6 Reflection and transmission for model No.1 and No.2

Fig.7 Eigen Values for natural frequencies of original model

5. 結 言

本論文では、波動的な観点から固有振動の生成条件について示した。二つの導波管において、導波管の両端、それぞれの導波管の接合部における反射と透過による位相変化と、導波管内を伝播するによる位相変化に着目して、固有振動数の算出が行えることを示した。

固有振動数を任意に変化させるためには、反射、透過、伝播による位相を変化させるように構造変更を行えばよい。固有振動となり得る位相の条件を満たす周波数が、断面積変化する際の固有振動数となる。

文 献

- (1) B.R.Mace , Wave Reflection and Transmission in Beam, *Journal of sound and vibration* (1984),97(2),237-246.
- (2) S-K.Lee,B.R.Mace and M.J.Brennan, Vibrational Analysis of a Non-Uniform One-Dimensional Structure Using a Wave Approach,ISVR Technical Memorandum, 918.
- (3) S-K.Lee,B.R.Mace and M.J.Brennan, Wave propagation, reflection and transmission in non-uniform one-dimensional waveguides, *Journal of sound and vibration*, 304 (2007),31-49.
- (4) G.Xie,D.J.Thompson and C.J.C.Jones,Mode count and modal density of structural systems: relationships with boundary conditions, *Journal of sound and vibration*, 274 (2004),621-651.