剛体と弾性結合された段付き片持ち梁の振動解析*

星野 祐^{*1}, 横田 聡^{*2}, 柳澤 光平^{*2}

Vibration Analysis of a Stepped Cantilever Beam Elastically Coupled With a Rigid Body

Tasuku HOSHINO^{*1}, Satoshi YOKOTA^{*2}, and Kohei YANAGISAWA^{*2}

^{*1} Dept. of Mechanical Systems Engineering, Tokyo University of Science, Suwa
5000-1 Toyohira, Chino, Nagano 391-0292, Japan

This paper develops a method of forced vibration analysis for a stepped cantilever beam with an elastically coupled rigid body at its intermediate point, according to the standard modal analysis. Starting from governing equations (one PDE, one ODE and boundary conditions,) the deflection function of PDE is then lifted into piecewise continuous functions at mechanical discontinuities. Using corresponding mode functions for the beam vibration and the rigid body motion, which are obtained in free vibration analysis, the problem is cast into solving a set of DAEs under boundary conditions. By establishing orthogonality and normalization conditions of the mode functions, a method of forced vibration analysis is finally derived. These conditions are considered as extended results of existing ones and main contributions of this work. Steady-state and transient responses can be computed analytically. The proposed method is primarily expected to serve as an alternative to FEM based vibration analysis, but it can also be utilized in designing vibration systems.

Key Words : Method of Vibration Analysis, Vibration of Continuous System, Forced Vibration, Beam Structure, Lumped Mass, Elastic Coupling

1. 緒 言

連続体の振動が解析的に扱えるのは、梁や限られた境界条件下での平板であり、これらについては古典的な解析手順と解析結果が知られている。^{(7)~(9)} 古典的な境界条件下の方形平板であっても、境界条件の組み合わせ次第では解析解が得られないことから、一般には有限要素法などの数値的手段による振動解析が広く行われている。数値的な手法は汎用的で近似解を容易に得ることができる反面、解析対象を定性する場合や、系に含まれるパラメータを最適化するには計算を反復する必要がある。この観点から、数値的手法と並行して、非古典的境界条件や幾何学的不連続梁に対する解析的手法が近年でも提案されている。⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁶⁾

著者らは、指定された性質を有する振動系を設計する目的で、方形平板の強制振動の解析と、系のパラメータの最適化に取り組んだ。解析対象の振動系は段付き梁と梁の midpoint に弾性結合された剛体から構成されており、古典的境界条件としては定式化できない。幾何学的不連続性を有する梁の強制振動を解析的に扱っている研究として Wang ら⁽¹⁾, Jalili ら⁽²⁾, Bashash ら⁽⁴⁾ などがある。いずれもモード解析に立脚しており、梁を幾何学的不連続点で分割した上で各区分に個別の梁関数を与え、付加的な境界条件を設定してそれぞれのモード関数を決定している。しかしながら、弾性結合された剛体を含む系を扱った例は見あたらない。

そこで本稿では、モード解析の手順に従って midpoint に弾性結合された剛体を有する片持ち段付き梁の強制振動を解析的に扱う手順を述べる。従来の手法との違いはモード関数を決定する問題が微分代数方程式 (DAE) の求積で定式化されることと、求められたモード関数の直交性と正規性が新たな形式で表される点と考えられる。

次節以降、解析対象のモデル化、問題の定式化、振動解析手順について述べる。

* 原稿受付 2012 年 7 月 17 日

^{*1} 正員, 諏訪東京理科大学 システム工学部 機械システム工学科 (〒 391-0292 長野県茅野市豊平 5000-1)

^{*2} 諏訪東京理科大学大学院 工学・マネジメント専攻 (〒 391-0292 長野県茅野市豊平 5000-1)

Email: hoshino@rs.suwa.tus.ac.jp

2. 解析対象のモデル化

本稿の解析対象である、剛体が弾性結合された段付き片持ち梁のモデルを図1に示す。梁の長さを L とし、この長さ方向に x 軸を取る。 $x = 0$ は固定端、先端 ($x = L$) が自由端であり、 $x = l_3$ の位置に剛体が弾性結合されている。梁は $l_1 \leq x < l_2$ (区間 II) のみ機械的性質が異なる段付き梁であり、以下では一例として、梁の曲げ振動を励起する目的で PZT パッチが貼り付けられているものとする。剛体の運動として鉛直方向の並進運動を考え、梁との間にこの運動自由度に関する復元力と構造摩擦があるものとする。

Fig. 1 Stepped cantilever beam with an elastically coupled mass

梁の機械的性質として、曲げ剛性 $EI(x)$ 、線密度 $\rho(x)$ 、減衰係数 $\eta(x)$ を考えることにする。これらの値は、図1の各区間で一定の値であるとし、例えば区間 I における値をそれぞれ EI_1, ρ_1, η_1 とする。区間 II のみ値が異なり、

$$EI_2 \neq EI_1 = EI_3 = EI_4, \quad \rho_2 \neq \rho_1 = \rho_3 = \rho_4, \quad \eta_2 \neq \eta_1 = \eta_3 = \eta_4 \quad (1)$$

である。このように梁の機械的性質は階段状に変化する。梁と弾性結合の構造減衰として妹澤減衰⁽⁸⁾を考えることにする。

検討対象を梁の曲げ振動 $w(x, t)$ と剛体の鉛直方向の振動 $z(t)$ とする。表1に定数と変数の一覧を示す。不連続面の位置 l_0 と l_4 は記述の都合で導入するもので、

$$l_0 := 0, \quad l_4 := L \quad (2)$$

であり、以後適宜用いる。

Table 1 Variables and parameters

Variables		Beam parameters		Coupling parameters	
t	Time	L	Length	M	Mass of rigid body
x	Position in beam	l_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)	Discontinuities	K	Stiffness
$w(x, t)$	Deflection	EI_k ($k = 1, 2, 3, 4$)	flexural rigidity	C	Damping
$z(t)$	Position of rigid body	ρ_k ($k = 1, 2, 3, 4$)	Linear density		
$V_a(t)$	Applied voltage to PZT	η_k ($k = 1, 2, 3, 4$)	Damping		

3. 支配方程式

PZT パッチによって励振される梁の曲げ振動は、たわみ $w(x, t)$ に関する次の線形偏微分方程式で表される^{(2)~(4)}。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{EI(x)\eta(x)}{\omega} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right\} + \rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = M_{p0} \frac{d^2 G(x)}{dx^2} V_a(t). \quad (3)$$

左辺第二項が妹澤減衰を表す。ここで、 $EI(x)$, $\eta(x)$, $\rho(x)$ は以下のように定義される区分的に一定の関数である：

$$EI(x) := \begin{cases} EI_1, & 0 \leq x < l_1 \\ EI_2, & l_1 \leq x < l_2 \\ EI_3, & l_2 \leq x < l_3 \\ EI_4, & l_3 \leq x \leq L \end{cases}, \quad \eta(x) := \begin{cases} \eta_1, & 0 \leq x < l_1 \\ \eta_2, & l_1 \leq x < l_2 \\ \eta_3, & l_2 \leq x < l_3 \\ \eta_4, & l_3 \leq x \leq L \end{cases}, \quad \rho(x) := \begin{cases} \rho_1, & 0 \leq x < l_1 \\ \rho_2, & l_1 \leq x < l_2 \\ \rho_3, & l_2 \leq x < l_3 \\ \rho_4, & l_3 \leq x \leq L \end{cases}. \quad (4)$$

また、 $G(x)$ は Heviside の階段関数 $H(x)^{(12) \sim (14)}$ を使って次のように定義される矩形関数である：

$$G(x) := H(x - l_1) - H(x - l_2). \quad (5)$$

M_{p_0} は駆動項 (右辺) の係数であり、PZT パッチの幾何学的形状及び電気機械的性質などから決まる定数である⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。

駆動項に現れる階段関数の 2 階微分は、この段階では値を評価できないが、強制振動の解析の際には評価可能な形式に書き換えられる。左辺第 2 項の ω は駆動信号 $V_a(t)$ の角周波数である。駆動信号を正弦波に限定する必要はなく、一般的な信号の場合は、各周波数成分に対する振動の重ね合わせを考えればよい。

剛体の並進運動は、 $x = l_3$ における梁のたわみ $w(l_3, t)$ で励起されることから、次の常微分方程式で表される：

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{MC}{\omega} \frac{d}{dt} \left\{ z(t) - w(l_3, t) \right\} + K \left\{ z(t) - w(l_3, t) \right\} = 0. \quad (6)$$

梁の固定端と自由端において、以下の境界条件が成り立つ。

$$\begin{cases} w(0, t) = 0 \\ \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \left. EI_4 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \\ \left. EI_4 \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0 \end{cases}. \quad (7)$$

また、梁に剛体が弾性結合されている点では、この点における剪断力と曲げモーメントの釣り合いから、次の境界条件が成り立つ。

$$\begin{aligned} -EI_3 \left. \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l_3-} + EI_4 \left. \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l_3+} &= \frac{MC}{\omega} \frac{d}{dt} \left\{ z(t) - w(l_3, t) \right\} + K \left\{ z(t) - w(l_3, t) \right\} \\ &= -M \frac{d^2 z(t)}{dt^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$EI_3 \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l_3-} - EI_4 \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l_3+} = 0. \quad (9)$$

以上から対象とする段付き片持ち梁と剛体の振動解析問題は、境界条件 (7), (8), (9) を満足する、連立微分方程式 (3), (6) の解の求積として定式化できる。

4. 自由振動の解析

4.1 モード解析問題への書き換え

はじめに、式 (3) の摩擦項 (左辺第 2 項) と駆動項 (右辺) を 0 とした段付き片持ち梁の曲げ振動の方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right\} + \rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

の解を求める。式 (10) は自由振動を表す。

式 (10) の解を位置の関数 $W(x)$ と時間の関数 $q(t)$ の積として

$$w(x, t) := W(x)q(t) \quad (11)$$

と書くことにする。これを式 (10) に代入すると

$$\frac{\frac{d^2 q(t)}{dt^2}}{q(t)} = - \frac{\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right\}}{\rho(x) W(x)} \quad (12)$$

のように変数分離できる. 式 (12) の左辺は t のみの関数, 右辺は x のみの関数であるので, 式 (12) の値を定数 (慣習的に) $-\omega^2$ とおくことにより, 次のような連立常微分方程式に書き換えられる:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right\} - \omega^2 \rho(x) W(x) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \omega^2 q(t) = 0. \quad (14)$$

式 (14) は単振動の方程式であり, 容易に解くことができる. ω は振動の角周波数を表している.

一方, 式 (13) に含まれる係数の値は式 (4) のように階段状に変化するため, このままでは扱いにくい. そこで, 以下のように $W(x)$ を不連続点で分割して定義する:

$$W(x) := \begin{cases} W^1(x), & 0 \leq x < l_1 \\ W^2(x), & l_1 \leq x < l_2 \\ W^3(x), & l_2 \leq x < l_3 \\ W^4(x), & l_3 \leq x \leq L \end{cases}. \quad (15)$$

各区間における位置の関数の右上にある下線付番号が区間を表す. (15) を方程式 (13) に代入すると, 定数係数の常微分方程式が得られる:

$$EI_k \frac{d^4 W^k(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho_k W^k(x) = 0, \quad l_{k-1} \leq x < l_k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (16)$$

次に, 剛体の並進変位も変位と時間関数の積で表し,

$$z(t) := Zq(t) \quad (17)$$

とする. 式 (17) を剛体の自由振動の運動方程式

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + K \left\{ z(t) - w(l_3, t) \right\} = 0 \quad (18)$$

に代入し, $q(t) \neq 0$ を用いると Z に関する代数方程式が得られる:

$$(M\omega^2 - K)Z + KW^4(l_3) = 0. \quad (19)$$

片持ち梁の固定端と自由端における境界条件 (7) は $W(x)$ を使って次のように書ける:

$$\begin{cases} W^1(0) = 0 \\ \left. \frac{dW^1(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} EI_4 \left. \frac{d^2 W^4(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \\ EI_4 \left. \frac{d^3 W^4(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0 \end{cases}. \quad (20)$$

同様に, 梁と弾性結合の接続点における境界条件 (8), (9) も以下のように書き換えられる:

$$M\omega^2 Z + \left\{ EI_3 \frac{d^3 W^3(x)}{dx^3} - EI_4 \frac{d^3 W^4(x)}{dx^3} \right\}_{x=l_3} = 0, \quad \left\{ EI_3 \frac{d^2 W^3(x)}{dx^2} - EI_4 \frac{d^2 W^4(x)}{dx^2} \right\}_{x=l_3} = 0. \quad (21)$$

さらに, $W(x)$ の分割 (15) に伴い, 隣接する $W^k(x)$ の幾何学的連続性に関する境界条件:

$$W^k(l_k) = W^{k+1}(l_k), \quad \left. \frac{dW^k(x)}{dx} \right|_{x=l_k} = \left. \frac{dW^{k+1}(x)}{dx} \right|_{x=l_k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (22)$$

および, 剪断力と力のモーメントの連続性に関する境界条件:

$$\left\{ -EI_k \frac{d^3 W^k(x)}{dx^3} + EI_{k+1} \frac{d^3 W^{k+1}(x)}{dx^3} \right\}_{x=l_k} = 0, \quad \left\{ EI_k \frac{d^2 W^k(x)}{dx^2} - EI_{k+1} \frac{d^2 W^{k+1}(x)}{dx^2} \right\}_{x=l_k} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (23)$$

が成り立つ.

以上より, 段付き片持ち梁の自由振動解析は, 以下の問題に書き換えられる:

1. 4 本の 4 階常微分方程式 (16) と 1 本の代数方程式 (19) から構成される微分代数方程式 (DAEs) を, 合計 16 本の境界条件 (20), (21), (22), 及び (23) の下で解き, 振動モード $W(x)$, Z を求める.
2. 常微分方程式 (14) を解いて時間関数 $q(t)$ を求める.
3. それぞれの振動モードと時間関数の積和により, 振動 $w(x, t)$, $z(t)$ を記述する.

以上が解析対象に対するモード解析の手続きである.

4.2 モード関数の算出

常微分方程式 (16) を解くと、その一般解は梁関数 (beam function)

$$W^k(x) = A^k \cos \beta^k x + B^k \sin \beta^k x + C^k \cosh \beta^k x + D^k \sinh \beta^k x, \quad l_{k-1} \leq x < l_k, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (24)$$

で与えられる。\$A^k, B^k, C^k, D^k\$ は積分定数、\$\beta^k\$ は式 (16) の係数から決まる定数で次式を満たす：

$$\beta^k = \left(\omega^2 \frac{\rho_k}{EI_k} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad \therefore \omega^2 = (\beta^1)^4 \frac{EI_1}{\rho_1}, \quad (25)$$

梁関数 (24) を 16 本の境界条件 (20), (21), (22), (23), 及び代数方程式 (19) に代入し、式 (25) から \$\omega, \beta^2, \beta^3, \beta^4\$ をそれぞれ \$\beta^1\$ で表すと、次の線形同次方程式が得られる：

$$A(\beta^1) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

ここで、\$\mathbf{k}\$ は梁関数の積分定数と \$Z\$ からなる 17 次のベクトル：

$$\mathbf{k} := [A^1, B^1, C^1, D^1, \dots, A^4, B^4, C^4, D^4, Z]^T \quad (27)$$

であり、\$A(\beta^1)\$ は未知定数 \$\beta^1\$ を含む 17 次の正方行列である。同次方程式 (26) が自明な解 (\$\mathbf{k} = \mathbf{0}\$) 以外の解を持つための条件は

$$|A(\beta^1)| = 0 \quad (28)$$

である。式 (28) を解くと \$\beta^1\$ の値が求められ、式 (25) から対応する \$\omega\$ 及び \$\beta^2, \beta^3, \beta^4\$ が求められる。

式 (28) は、三角関数と双曲線関数を含む、\$\beta^1\$ に関する超越方程式であり、解を無数に持つ。実際に解を求めるには数値的手法を用いて近似解を計算する。式 (28) の解のうち、小さい方から \$n\$ 番目の解を \$\beta_n^1\$ と書くことにする。\$|A(\beta_n^1)| = 0\$ であるので \$A(\beta_n^1)\$ の階数は 17 より小さく、

$$A(\beta_n^1) \mathbf{k}_n = \mathbf{0} \quad (29)$$

は劣決定系となる。そこで \$\mathbf{k}_n^1 = A_n^1 = \alpha_n\$ (\$\mathbf{k}_n^1\$ は \$\mathbf{k}_n\$ の第 1 成分を意味する) とすると、式 (29) の解は \$\alpha_n\$ を使って

$$\mathbf{k}_n^{2, \dots, 17} = -\alpha_n \left\{ A(\beta_n^1)_{2, \dots, 17}^{2, \dots, 17} \right\}^{-1} A(\beta_n^1)_{1, 1}^{2, \dots, 17} \quad (30)$$

で計算できる。ここで、\$\mathbf{k}_n^{2, \dots, 17}\$ は \$\mathbf{k}_n\$ の第 1 行 (第 1 成分) を除いた 16 次の列ベクトル、同様に \$A(\beta_n^1)_{2, \dots, 17}^{2, \dots, 17}\$ は \$A(\beta_n^1)\$ の第 1 行と第 1 列を除いた 16 次の正方行列を意味する。式 (30) からわかるように、式 (29) の解 \$\mathbf{k}_n\$ は定数倍の冗長性を持つが、後述するモード関数の正規化によってこの冗長性を排除できる。\$\beta_n^1\$ に対応する \$\mathbf{k}_n := [A_n^1, B_n^1, C_n^1, D_n^1, \dots, A_n^4, B_n^4, C_n^4, D_n^4, Z_n]^T\$、及び \$\beta_n^1\$ から計算される固有振動数 \$\omega_n\$ と \$\beta_n^2, \beta_n^3, \beta_n^4\$ を使って、段付き片持ち梁の \$n\$ 次モードの固有振動は次のように求められる。

$$w_n(x, t) = W_n(x) q_n(t), \quad z_n(t) = Z_n q_n(t) \quad (31)$$

ただし、

$$W_n(x) := \begin{cases} A_n^1 \cos \beta_n^1 x + B_n^1 \sin \beta_n^1 x + C_n^1 \cosh \beta_n^1 x + D_n^1 \sinh \beta_n^1 x, & 0 \leq x < l_1 \\ A_n^2 \cos \beta_n^2 x + B_n^2 \sin \beta_n^2 x + C_n^2 \cosh \beta_n^2 x + D_n^2 \sinh \beta_n^2 x, & l_1 \leq x < l_2 \\ A_n^3 \cos \beta_n^3 x + B_n^3 \sin \beta_n^3 x + C_n^3 \cosh \beta_n^3 x + D_n^3 \sinh \beta_n^3 x, & l_2 \leq x < l_3 \\ A_n^4 \cos \beta_n^4 x + B_n^4 \sin \beta_n^4 x + C_n^4 \cosh \beta_n^4 x + D_n^4 \sinh \beta_n^4 x, & l_3 \leq x \leq L \end{cases}, \quad (32)$$

$$q_n(t) := P_n \cos \omega_n t + Q_n \sin \omega_n t \quad (33)$$

である。以上を \$n = 1, 2, \dots\$ について必要なだけ計算する。

段付き片持ち梁の一般的な自由振動は、固有振動 (31) の和

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t), \quad z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n q_n(t) \quad (34)$$

で表される。式 (34) 中に含まれる定数 \$P_n, Q_n\$ (\$n = 1, 2, \dots\$) は、梁と剛体の初期変位及び初期速度によって決定できる。

4.3 モード関数の直交性と正規化 (主要結果 I)

4.2 節で求められた段付き片持ち梁及び剛体の固有振動モードが有するいくつかの性質を示す。まず, m 次の固有振動モードを $W_m(x)$, Z_m とすると, 次の直交性が成り立つ。

補題 1 (モード関数の慣性に関する直交性). 異なる固有振動モードは慣性に関して直交する:

$$\int_0^L \rho(x) W_m(x) W_n(x) dx + M Z_m Z_n = 0, \quad m \neq n. \quad (35)$$

証明. m 次モード関数 $W_m(x)$, Z_m は式 (13), (21) の解であり,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} \right\} - \omega_m^2 \rho(x) W_m(x) = 0, \quad (36)$$

$$M \omega_m^2 Z_m + \left\{ EI_3 \frac{d^3 W_m^3(x)}{dx^3} - EI_4 \frac{d^3 W_m^4(x)}{dx^3} \right\}_{x=l_3} = 0 \quad (37)$$

を満たす。したがって, n 次 ($n \neq m$) のモード関数を掛けた次の式が成り立つ:

$$\int_0^L \{ \text{式 (36) 左辺} \} \times W_n(x) dx - \{ \text{式 (37) 左辺} \} \times W_n^3(l_3) = 0. \quad (38)$$

左辺被積分項の第 1 項を 2 度部分積分し, 境界条件 (20), (22), (23) を考慮して整理すると

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} dx - \omega_m^2 \left\{ \int_0^L \rho(x) W_m(x) W_n(x) dx + M Z_m W_n^3(l_3) \right\} = 0 \quad (39)$$

が得られる。また, n 次モード関数が満たす式に m 次のモード関数を掛けて, 同様の計算をすると以下が得られる:

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} dx - \omega_n^2 \left\{ \int_0^L \rho(x) W_n(x) W_m(x) dx + M Z_n W_m^3(l_3) \right\} = 0. \quad (40)$$

式 (40) から式 (39) を辺々引き, 式 (19), (22) を使うと

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \left\{ \int_0^L \rho(x) W_m(x) W_n(x) dx + M Z_m Z_n \right\} = 0 \quad (41)$$

が得られる。 $\omega_m \neq \omega_n$ より証明された。□

補題 2 (モード関数の剛性に関する直交性). 異なる固有振動モードは剛性に関して直交する:

$$\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} \right\} W_n(x) dx + K \left\{ Z_m - W_m(l_3) \right\} Z_n = 0, \quad m \neq n. \quad (42)$$

証明. m 次モード関数が満たす式に n 次 ($m \neq n$) のモード関数を掛け, 次式を計算する:

$$\int_0^L \{ \text{式 (36) 左辺} \} \times W_n(x) dx - \{ \text{式 (37) 左辺} \} \times Z_n = 0. \quad (43)$$

補題 1 を用いると次式が得られる:

$$\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} \right\} W_n(x) dx + K \omega_m^2 Z_m Z_n = 0. \quad (44)$$

式 (19) を用いることにより証明された。□

次に m 次の固有振動数を ω_m とすると, 次の性質が成り立つ。

補題 3 (固有振動数). 固有振動モードと固有振動数は次の関係を満たす:

$$\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} \right\} W_m(x) dx + K \left\{ Z_m - W_m(l_3) \right\} Z_m = \omega_m^2 \left\{ \int_0^L \rho(x) W_m^2(x) dx + M Z_m^2 \right\}. \quad (45)$$

証明. m 次モード関数が満たす式に m 次のモード関数を掛け, 次式を計算する:

$$\int_0^L \{ \text{式 (36) 左辺} \} \times W_m(x) dx - \{ \text{式 (37) 左辺} \} \times Z_m = 0. \quad (46)$$

式 (19) を用いることにより証明された。□

さらに、直ちに次の命題が得られる:

系 1 (正規化モードの固有振動数). 固有振動モードが正規化されている時, すなわち

$$\int_0^L \rho(x) W_m^2(x) dx + M Z_m^2 = 1 \quad (47)$$

である時, 固有振動数は次式で与えられる:

$$\omega_m^2 = \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} \right\} W_m(x) dx + K \left\{ Z_m - W_m(l_3) \right\} Z_m. \quad (48)$$

以上の直交性と正規性は段付き片持ち梁の強制振動の解析の際に必要となる. したがって, 固有振動モードが系 1 の正規性 (47) を満たすように, 式 (29) の k_n に含まれる α_n を値を選ぶものとする. なお, 以上の命題中の積分は, 区分的に行って合計することを意味する. 例えば補題 1, 補題 2 の場合はそれぞれ次のように計算すればよい.

$$\int_0^L \rho(x) W_m(x) W_n(x) dx = \sum_{k=1}^4 \rho_k \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_m^k(x) W_n^k(x) dx, \quad (49)$$

$$\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} \right\} W_n(x) dx = \sum_{k=1}^4 EI_k \int_{l_{k-1}}^{l_k} \frac{d^4 W_m^k(x)}{dx^4} W_n^k(x) dx. \quad (50)$$

5. 強制振動の解析

5.1 時間関数の算出 (主要結果 II)

段付き片持ち梁の強制振動に対する応答の解析は, 変位を固有振動モードの和 (34) で表し, その中に含まれる時間関数を決定することによって行われる.

時間関数について次の性質が成り立つ.

定理 1 (強制振動の時間関数). 段付き片持ち梁の強制振動に対する応答を, 正規化された固有振動モード $\{W_n(x), Z_n\}$ で展開するとき, m 次振動モードの時間関数 $q_m(t)$ は次の微分方程式を満たす:

$$\frac{d^2 q_m(t)}{dt^2} + \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \frac{dq_n(t)}{dt} + \omega_m^2 q_m(t) = M_{p0} \psi_m V_a(t), \quad m = 1, 2, \dots \quad (51)$$

ここで ω_m は m 次モードの固有振動数, ω は駆動信号 $V_a(t)$ の角周波数, M_{p0} は定数である. また, ϕ_{mn}, ψ_m は次のように計算される定数である:

$$\phi_{mn} := \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \eta(x) \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} \right\} W_m(x) dx + MC \left\{ Z_n - W_n(l_3) \right\} Z_m, \quad (52)$$

$$\psi_m := \int_0^L \frac{d^2 G(x)}{dx^2} W_m(x) dx = - \left. \frac{dW_m(x)}{dx} \right|_{x=l_1} + \left. \frac{dW_m(x)}{dx} \right|_{x=l_2}. \quad (53)$$

証明. 強制振動の方程式 (3) の変位 $w(x, t)$ に (34) を代入し, 整理すると次の式が得られる:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} \right\} q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{EI(x) \eta(x)}{\omega} \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} \right\} \frac{dq_n(t)}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(x) W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} \\ = M_{p0} \frac{d^2 G(x)}{dx^2} V_a(t). \end{aligned} \quad (54)$$

両辺に $W_m(x)$ を掛け, $0 \leq x \leq L$ で積分すると次の式が得られる:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} \right\} W_m(x) dx q_n(t) + \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{EI(x) \eta(x)}{\omega} \frac{d^2 W_n(x)}{dx^2} \right\} W_m(x) dx \frac{dq_n(t)}{dt} \right. \\ \left. + \int_0^L \rho(x) W_n(x) W_m(x) dx \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} \right] = M_{p0} \int_0^L \frac{d^2 G(x)}{dx^2} W_m(x) dx V_a(t). \end{aligned} \quad (55)$$

次に, 剛体の並進運動の方程式 (6) の変位 $z(t)$ に (34) を代入し, 両辺に Z_m を掛けて整理すると次の式が得られる:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[M Z_n Z_m \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \frac{MC}{\omega} \left\{ Z_n - W_n(l_3) \right\} Z_m \frac{dq_n(t)}{dt} + K \left\{ Z_n - W_n(l_3) \right\} Z_m q_n(t) \right] = 0. \quad (56)$$

式 (55), (56) を辺々加え, 補題 1, 補題 2, 系 1 を用いると, 式 (51), (52), (53) が得られる. $\square$

定理 1 の微分方程式 (51) のうち、低次のものから必要な数だけ連立させて解き、その解を (34) に代入すれば強制振動に対する応答が求まる。

5.2 状態空間モデルとしての表現

段付き片持ち梁の曲げ振動については 4 次までの振動モードを考え、剛体の並進運動の振動モードを合わせて 5 つの振動モードを考えることにする。

時間関数の連立微分方程式 (51) は次のベクトル形式で書ける：

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} & \phi_{35} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} & \phi_{45} \\ \phi_{51} & \phi_{52} & \phi_{53} & \phi_{54} & \phi_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix} M_{p0} V_a(t). \quad (57)$$

ここで、 $\dot{q}$ は q の時間微分を表す。式 (57) 左辺第 2 項の係数行列を Φ 、左辺第 3 項の係数行列を Ω 、さらに右辺のベクトルを Ψ と書き、

$$A(\omega) := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 5} & I_5 \\ -\Omega & -\frac{1}{\omega} \Phi \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ M_{p0} \Psi \end{bmatrix} \quad (58)$$

とする。また、時間関数とその微分をまとめて状態量ベクトル

$$\xi(t) := [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5]^T \quad (59)$$

とすると、式 (57) をベクトル形式の線形常微分方程式として書くことができる：

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A(\omega)\xi(t) + bV_a(t). \quad (60)$$

モード関数から構成されるベクトルを

$$c_w^T(x) := [W_1(x), W_2(x), W_3(x), W_4(x), W_5(x), \mathbf{0}_{1 \times 5}], \quad (61)$$

$$c_z^T := [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \mathbf{0}_{1 \times 5}] \quad (62)$$

とすると、強制振動に対する段付き梁のたわみ $w(x, t)$ 、剛体の並進運動 $z(t)$ はそれぞれ、

$$w(x, t) = c_w^T(x)\xi(t), \quad z(t) = c_z^T\xi(t) \quad (63)$$

と書くことができる。

5.3 強制振動現象の評価

駆動信号 (PZT パッチへの印加電圧) $V_a(t)$ に対する強制振動の時間応答は、線形システム (60), (63) のシミュレーションを行うことにより確認できる。特に段付き梁のたわみ $w(x, t)$ は位置 x の関数であるため、いくつかの x_k に対する応答 $w(x_k, t)$ を算出すれば、たわみ形状を再現できる。

一方、駆動信号の周波数の変化に対する剛体振動の変化については、駆動信号 $V_a(t)$ から剛体変位 $z(t)$ への伝達関数を評価すればよい。変位の大きさは周波数伝達関数の大きさによって評価できるため、 V_p を駆動信号の振幅、 ω を角周波数として、次式で計算できる：

$$|z(j\omega)| = |G(j\omega)V_a(j\omega)| = |c_z^T \{j\omega I - A(\omega)\}^{-1} b| V_p \quad (64)$$

6. 結 言

本稿では、剛体と弾性結合された段付き片持ち梁のモード解析に基づいた振動解析手法を検討した。特に剛体が弾性結合された場合の直交条件と正規化条件、さらに強制振動に対する時間関数が満たす微分方程式を導出した。これにより、強制振動の解析手順が確立された。5 次の振動モードまでを考慮するとき、段付き片持ち梁の強制振動は以下の手順で解析できる：

1. 超越方程式 (28) を満たす解 β_n^1 を、小さい値から順に 5 個、数値的に求める。
2. 式 (30) を使って、それぞれの β_n^1 に対応する振動モード k_n を求める。
3. 式 (25) を使って、それぞれの β_n^1 に対応する $\omega_n, \beta_n^2, \beta_n^3, \beta_n^4$ を求める。
4. 式 (47) を満たすように k_n を定数倍し (α_n を選び)、モード関数を正規化する ($n = 1, \dots, 5$)。
5. 式 (52), 式 (53) を使って ϕ_{mn}, ψ_m を求める ($m, n = 1, \dots, 5$)。
6. 入力信号 $V_a(t)$ に対する時間応答を、システム (60), (63) のシミュレーションから計算する。
7. 段付き梁のたわみや剛体変位の周波数特性を式 (64) から計算する。

本稿が対象とした振動系は、弾性結合された剛体が 1 つでその運動を 1 自由度としたが、剛体が複数の場合や運動の自由度が (回転運動も含めて) 高い場合でも、同様の直交性と正規性を示すことが可能であり、同じ手順で強制振動を解析できる。また、本稿では振動を求める際に β^1 (あるいは各振動数 ω) を未知として行列式 (28) を解いたが、 β^1 を与え、代わりに構造パラメータ (例えば弾性結合の位置 l_3) について解くと、本手法を振動系の設計に応用することもできる。FEM による振動解析と並んで、解析や設計の見通しを得る一手段として活用できると考えている。

文 献

- (1) D. Wang, "Optimal Design of an Intermediate Support for a Beam With Elastically Restrained Boundaries," *ASME J. Vibr. Acoust.*, **133**, pp. 031014, 2011.
- (2) Nader Jalili, *Piezoelectric-Based Vibration Control — From Macro to Micro/Nano Scale Systems*, Springer, 2010.
- (3) Saeid Bashash, *Modeling and Control of Piezoactive Micro and Nano Systems*, Ph. D. Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering, Clemson Univ., Clemson, SC, 2008.
- (4) Saeid Bashash, Amin Salehi-Khojin, Nader Jalili, "Forced Vibration Analysis of Flexible Euler-Bernoulli Beams with Geometrical Discontinuities," *Proc. American Control Conf.*, pp. 4029-4034, 2008.
- (5) A. Salehi-Khojin, S. Bashash and N. Jalili, "Modeling and experimental vibration analysis of nanomechanical cantilever active probes," *J. Micromech. Microeng.* **18**, 085008:1-11, 2008.
- (6) Igor A. Karnovsky, Olga i. Lebed, *Free Vibrations of Beams and Frames — Eigenvalues and Eigenfunctions*, McGraw-Hill Engineering Reference, McGraw-Hill, 2004.
- (7) S.M. Han, H. Benaroya and T. Wei, "Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories," *J. of Sound and Vibration*, **225**, pp. 935-988, 1999.
- (8) 小林繁夫, 振動学, 丸善, 1994.
- (9) 近藤恭平, 工学基礎 振動論, 倍風館, 1993.
- (10) 竹園茂男, 埴 克己, 感本広文, 稲村栄次郎, 弾性力学入門 — 基礎理論から数値解法まで —, 森北出版, 2007.
- (11) 関谷 壮, 斉藤 渥, 薄板構造力学, 共立出版, 1992.
- (12) 日本数学会, 岩波数学辞典第 4 版, 岩波書店, 2007.
- (13) Wikipedia, the free encyclopedia, Dirac delta function, http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function, 2011/11/2.
- (14) Wolfram Math World, Delta Function, <http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html>, 2011/11/2.
- (15) (株) 富士セラミックス, 圧電セラミック テクニカル・ハンドブック.
- (16) FDK(株), 圧電セラミックス, 技術資料 BZ-TEJ001-0211.