大規模非線形系に対する高性能振動解析手法の開発* (歯車軸系の振動解析)

田畑 恵良^{*1}, 近藤 孝広^{*2}, 松崎 健一郎^{*3}, 宗和 伸行^{*3}, 佐々木 卓実^{*4}

Development of a High-Performance Method of Vibration Analysis for a Large-Scale Nonlinear System (A Vibration Analysis of Gear – Shaft System)

Keisuke TABATA^{*1}, Takahiro KONDOU^{*2}, Kenichiro MATSUZAKI^{*3},
Nobuyuki SOWA^{*3} and Takumi SASAKI^{*4}

^{*1} Kyushu Univ. Dept. of Mechanical Engineering
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 819-0395 Japan

A rational method of dimensional reduction, which is proposed for vibration analysis of a large-scale structure with locally strong nonlinearity, is applied to a gear-shaft system. A pair of gears has some significant nonlinear behaviors. The meshing force stiffness between a pair of gears changes periodically because of the change of the number of the pairs of teeth which touch each other and the move of the contact point between the teeth. In addition, the pair of gears has the backlash and it has nonlinear dynamic behavior come of gear rattle. The analytical model for the coupled bending torsional vibration of the gear-shaft system is derived considering the nonlinearity described above. Furthermore, the rational method of dimensional reduction use complex constrained modes to consider the gyro effect of the system, and the effect of global nonlinearity of the system is unconsidered. The effectiveness of the method is verified by the numerical vibration analysis of the gear-shaft system.

Key Words : Nonlinear Vibration, Stability, Modal Analysis, Constrained Modes, Gear Rattle, Mesh Stiffness Variation, Vibration of Gear-Shaft System

1. 緒 言

近年、省エネ化や省資源化の志向が強まり、限界設計の追及に拍車がかかっていることから、非線形振動に基づくトラブルが数多く発生しており、大規模非線形系の振動解析手法の開発に対する必要性がますます増大している。大規模非線形系の振動解析には、線形モード展開を利用したガラーキン法が用いられることが一般的であるが、この種の解析法は解析アルゴリズムの汎用性が高い反面、高精度な解析を行うためには多数のモードを必要とし計算時間が爆発的に増大するという欠点を有している。これまでの研究⁽¹⁾では、局所的に強い非線形性を有する大規模系に対して、非線形性の影響を適切に反映した合理的な低次元化法を提案し、少数のモードを用いるだけで高精度な解析（安定判別を含む）を可能とした。さらに非比例減衰系にも適用可能な複素拘束モードを用いた低次元化法⁽²⁾⁽³⁾や、大域的な非線形性の取り扱い方⁽⁴⁾、導出が困難な高次モードの取り扱い方⁽⁵⁾も提案してきた。

既報では、本低次元化法を直線状はり構造物⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁴⁾や回転体⁽³⁾、三次元樹状構造物⁽⁵⁾などの基本的な構造物の非線形振動解析に適用することでその有効性を確認してきた。本報では、系の非線形性が重大な問題となる機械システムの一例として歯車軸系を取り上げ、本低次元化法の有効性を検証する。歯車軸系の振動特性には、噛合い剛性の時間的な変化、バックラッシによる歯打ち現象など様々な要素が複雑に影響しており、その振動特性は未

* 原稿受付 2012 年 7 月 17 日

^{*1} 学生員, 九州大学 工学部 (〒819-0395 福岡県福岡市
西区元岡 744)

^{*2} フェロー, 九州大学

^{*3} 正員, 九州大学

^{*4} 正員, 北九州市立大学国際環境工学部

E-mail: k.tabata@mvib.mech.kyushu-u.ac.jp

だ十分には確認されていない。従来の研究においても、剛性の時間的変化を無視して歯打ち現象にのみ着目するなど、様々な要素を総合的に考慮してモデル化を行っているものは、あまり多く見受けられない⁽⁶⁾⁽⁷⁾。そこで、本報では、一對の平歯車に関して、その基本的な振動特性を詳しく把握するために、剛性の時間的な変化及びバックラッシュの影響を考慮してモデル化を行った。さらに、そのモデル化を基に、支持部や軸の曲げとねじりの連成振動の影響を考慮した大規模自由度を有する歯車軸系に対して、本低次元化法を適用しその有効性を検証した。本報では大域的な非線形性の影響は考慮していない。

2. 合理的な低次元化法⁽²⁾

2・1 基礎式

本報では次式に示すような局所的に強い非線形性を有する大規模系を取り扱う。

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ n_2(y_2, \dot{y}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ & y_1, f_1 = f_1(\omega t) : (n \times 1), \quad y_2, n_2 = n_2(y_2, \dot{y}_2), f_2 = f_2(\omega t) : (m \times 1) \\ & M_{11}(= M_{11}^T), C_{11}, K_{11}(= K_{11}^T) : (n \times n), \quad M_{22}(= M_{22}^T), C_{22}, K_{22}(= K_{22}^T) : (m \times m) \\ & C_{12}, K_{12} : (n \times m), \quad C_{21}, K_{21} : (m \times n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $"\dot{} = d/dt$ 、 y_1 は非線形力が作用しない系内の大部分の節点（以下、線形節点と呼ぶ）の状態量をまとめた n 次元ベクトル、 y_2 は歯車の噛合い力などの非線形力が作用する y_1 以外のごく少数の節点（以下、非線形節点と呼ぶ）の状態量をまとめた m 次元ベクトルであり（ただし $n \gg m$ ）、質量行列 M_{11} および剛性行列 K_{11} は正定で、 C_{11} および C_{12} は非比例減衰、 n_2 は $y_2, \dot{y}_2$ に関する非線形関数であり、 f_1, f_2 は基本周期 $2\pi/\omega$ の周期外力とする。

2・2 低次元モデルの構成法

本研究では比例減衰系を対象とする実拘束モードを用いた低次元化法と、非比例減衰系にも適用可能な複素拘束モードを用いた低次元化法を提案している。本報では定常回転する軸や歯車に作用するジャイロモーメントの影響を考慮するため、後者の方法を用いた。低次元モデルの構成法は既報⁽²⁾と同様なので、ここでは概要を述べるにとどめる。

まず、式 (1) の線形節点 y_1 に関する式において、状態量 $y_1, \dot{y}_1$ をまとめて複素拘束モード座標 ξ_1 に変数変換する。次に、非線形性の影響の大きなごく少数の支配的モード座標 ξ_{1a} のみを残し、非線形性の影響の小さな残りの副次的モード座標 ξ_{1b} については、適切に近似した上で消去し、非線形節点の状態量に関する式の係数行列に補正項を足しこむ。なお、この際に用いる近似式はモード座標および非線形節点の状態量の基本波成分のみを考慮することで導く。

最後に、支配的モードに関する方程式と消去した副次的モードの影響を取り込んだ非線形節点に関する方程式とをまとめることによって、低次元化方程式が導出される。

2・3 モードの分離法

既報⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾では、支配的モードと副次的モードとを分離する際、外力の角振動数 ω に固有振動数が近いモードを順に n_a 組、一定数多めに抽出して計算を行い、多めに抽出された支配的モードの中から前述の近似式が良く当てはまるモードについてはその後の任意の回数の計算で随時消去し、任意の回数計算ごとに再びモードを多めに抽出しなおす、という手順を繰り返す低次元化法を提案していた。その際近似式が良く当てはまるか否かは式 (2) で示される相対誤差ノルム Δ_{p1} の大きさが任意に定められた閾値 e_1 よりも小さいか否かで判断していた。

$$\Delta_{p1} = \frac{\|\xi_{1a,p}^R - \tilde{\xi}_{1a,p}^R\|}{\|\xi_{1a,p}^R\|} + \frac{\|\xi_{1a,p}^I - \tilde{\xi}_{1a,p}^I\|}{\|\xi_{1a,p}^I\|} \quad (p=1, \dots, n_a), \quad \|\ast\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\ast^2) d\tau} \quad (2)$$

ただし上式において ξ_{1a} は抽出された支配的モード座標, $\tilde{\xi}_{1a}$ は近似されたモード座標を示し, 添え字 $*_{1a,p}^R, *_{1a,p}^I$ は p 次 ($p=1, \dots, n_a$) の複素拘束モードの実部と虚部に対応している. この相対誤差 Δ_{p1} は分母にモードのノルムを用いた形で示される. そのためノルムが小さなモードは相対誤差 Δ_{p1} が大きくなり, 抽出されやすい傾向にある. そこで, 本報では Δ_{p1} に加えて p 次のモードの振幅が, 全てのモードの振幅の合計に占める振幅割合 Δ_{p2} を次式のように定義し, 振幅割合が任意に設定された閾値 e_2 よりも小さい場合には, 解に与える影響が小さいものとみなしてそのモードは消去する.

$$\Delta_{p2} = \frac{\|\xi_{1a,p}^R\| + \|\xi_{1a,p}^I\|}{\sum_{j=1}^{n_a} \|\xi_{1a,j}^R\| + \sum_{j=1}^{n_a} \|\xi_{1a,j}^I\|} \quad (p=1, \dots, n_a) \quad (3)$$

モードの相対誤差 Δ_{p1} と振幅割合 Δ_{p2} のそれぞれを, 副次的モードを消去する指標として利用したことで必要最低限のモード数で周波数応答の効率的な計算ができるため, 計算速度の向上が期待される. モードを消去する際の条件式は式 (4) で示される. 多めに抽出された支配的モード n_a 組の中で, 式 (4) を満たすモードはその後の任意の回数の計算では随時消去される.

$$\Delta_{p1} < e_1 \cup \Delta_{p2} < e_2 \quad (p=1, \dots, n_a) \quad (4)$$

3. 平歯車対のモデル化

本章では, 歯車対の噛合い部に作用する非線形噛合い力を導き, 最終的には既報⁽³⁾⁽⁹⁾を参考にして歯車軸系の曲げとねじりの連成振動を取り扱うための運動方程式を導く. 噛合い力を導く際は, 噛合い部を介して連成した 2 つの歯車節点が噛合い部に与える影響を考える. 導かれた噛合い力を用いて歯車節点の運動方程式を導く際は, 噛合い力の影響と軸の内部節点からの影響を考慮して運動方程式を導出する.

3.1 平歯車対のモデル化の概要

図 1 および図 2 はモデル化された歯車対を模式的に示した図である. 座標系は回転軸方向と z 軸が平行になるような静止直交座標系 $O-xyz$ を考える. 歯車はインボリュート歯車を用い, それぞれ半径がピッチ円半径 r_1, r_2 と等しい 2 つの剛体円板として取り扱い, 駆動歯車を歯車 1, 従動歯車を歯車 2 と呼ぶ. 2 つの歯車はそれぞれの軸の回転角速度 Ω_i ($i=1, 2$) で定常回転しているものとする. このとき, 歯車のねじり振動に関しては定常回転角 $\Omega_i t$

Fig.1 Analytical model of spur gear node

Fig.2 Direction of meshing force

と $\Omega_i t$ からのねじれ角 ϕ_i とに分離して取り扱う。歯車の x, y 軸方向の並進変位を x_i, y_i , x, y 軸回りの回転に関する角変位を θ_{xi}, θ_{yi} とおく。さらに各歯車の質量を m_i , x, y 軸まわりの慣性モーメントを J_i , z 軸まわりの慣性モーメントを I_i , 歯数を z_i とおき、圧力角を α とする。

図 2 に示すように、噛合い部には、歯面の法線方向に噛合い部のたわみ δ と、たわみ速度 $\dot{\delta}$ に応じた荷重 W が作用する。そのため、噛合い部から歯車の剛体円板に対し、 x, y 方向荷重および z 軸回りのモーメントが作用し、2 つの歯車は並進方向とねじれ方向に連成している。本報において歯車の噛合い率 ε は $1 < \varepsilon < 2$ の範囲とし、噛合いは 1 対か 2 対の歯で行われるもの仮定する。また噛合い剛性に歯車の変動変位 $x_i, \theta_{xi}, y_i, \theta_{yi}, \phi_i$ が与える影響は無視している。そのため噛み合う歯の枚数は定常回転角 $\Omega_i t$ に応じて変化し、噛合い剛性 k は周期的に変化する。一方で歯のたわみ δ は歯車の定常回転角 $\Omega_i t$ と変動変位 x_i, y_i, ϕ_i に依存して (角変位 θ_x, θ_y の影響は無視) 変化するものとして取り扱う。なお、バックラッシの影響を考慮するため、図 2 の (a) のように駆動歯車を正方向に回転させたときに生じる歯の接触を進み側での接触と呼び、図 2 の (b) のように駆動歯車を逆方向に回転させたときに生じる接触を遅れ側での接触と呼ぶことにする。また、進み側でも遅れ側でも接触しないとき、歯面分離が生じる。

3.2 噛合い剛性の導出

本節では歯車の噛合い剛性 k を導出する。前述の通り本報において噛合いは 1 対か 2 対の歯で行われると仮定しているので、噛合い剛性は噛合っている歯の剛性 K の和として表される。歯の剛性は石川の式⁽⁸⁾を用いて、噛合い長さ l の関数 $K(l)$ として導く。噛合い剛性は定常回転角に応じて歯の剛性が変化して生じる連続的な変化と、噛み合う歯の対の数変化して生じる不連続な変化との二種類の非線形性を有する。本節では、歯の剛性 K を石川の式を用いて l の関数として導き、噛合い剛性 k を導出する。

3.2.1 噛合い長さの導出

図 3 は定常回転するインボリュート歯車が噛み合う様子と、それに伴う歯の剛性 K および噛合い剛性 k の変化を表している。ある時刻に噛み合っている歯の剛性 K は、噛合い開始点 S から噛合い点 A までの作用線上での長さである噛合い長さ l の関数として示すことができる。ただし、噛合い長さ l は本来 x_i, y_i, ϕ_i, t の関数であるが、 x_i, y_i, ϕ_i の影響は無視し (影響が小さいことは確認済み)、 t のみの関数として導出する。なお、本項では歯のたわみおよびバックラッシを無視しているので、歯車 1 に関する噛合い長さ l_1 と歯車 2 に関する噛合い長さ l_2 は一致し、 $l_1 = l_2 = l$ として扱う。

まず、進み側で接触する場合、噛合い長さ l は図 3 のように図示される。 $l = \overline{SA}$ に注目すると、インボリュート曲線の特徴から、以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} l(\tau_g) &= \overline{SA} = r_{g1}\Omega_1 t = r_{g2}\Omega_2 t = \beta\tau_g \quad (0 \leq l < t_e) \\ \beta &= r_{gi}/z_i, \quad \tau_g = \omega_g t, \quad \omega_g = \Omega_1 z_1 = \Omega_2 z_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

なお、 r_{gi} ($i=1, 2$) は歯車の基礎円半径であり、 τ_g は一対の歯が $0 < l < t_e$ の区間を通過する定常噛合い周期にあわせた無次元時間である。

次に、遅れ側で接触する場合は接触する歯面と力の作用線の方法が変化し、噛合いのタイミングもずれるので、進み側の場合とは異なり、以下のようになる。

$$\bar{l}(\tau_g) = \delta_b - l \quad (6)$$

ただし、 δ_b は進み側と遅れ側の噛合いのタイミングのずれに相当する定数であり、次式で示される。

$$\delta_b = r_{g1} \{2(\alpha - \psi_1) - \chi_1\} \quad (7)$$

なお、 ψ_1, χ_1 は歯車の幾何学的な条件から決まる定数である (δ_b の導出過程は割愛する)。

Fig.3 Route of contact point of spur gear

3・2・2 歯車対の噛合い剛性

ある時刻に噛み合っている歯の枚数は前項で導出した噛合い長さ l と、歯車の幾何学的な条件から決まる噛合い率 ε とで求めることができる。本報では噛合い率は $1 < \varepsilon < 2$ の範囲と仮定しているの、 $l=0 \rightarrow \varepsilon' t_e$ および $l=t_e \rightarrow \varepsilon t_e$ 、すなわち噛み合いの始めと終わりの $\varepsilon' t_e$ の間 ($\varepsilon' = \varepsilon - 1$) では2対の歯で噛み合い、 $l=\varepsilon' t_e \rightarrow t_e$ の間では1対の歯で噛み合う。噛み合う歯の枚数が変化すると噛合い剛性は不連続に変化する。噛み合いは $l=0 \rightarrow t_e$ の間を1周期とする噛合い周期ごとに繰り返されるため、 $0 \leq l < t_e$ の範囲で剛性の変化を考えることとする(すなわち、 $l=0$ と $l=t_e$ は同じ噛合い状態を示す)。

また、歯車が回転すると、図3に図示したように駆動歯車の進み側の面の場合、接触点Aは歯面上を歯底側から歯先側に移動する。この接触点Aの歯面上での移動が原因で、歯の剛性 K は連続的に変化する。この連続的な剛性の変化は石川の式を用いて、噛合い長さ l の関数 $K(l)$ として導く ($K(l)$ の具体的な表記は文献⁹⁾参照)。

前述の通り、歯の噛合いは1対および2対の歯で噛み合う状態が交番的に繰り返される。そのため噛合い剛性 k の変化は接触点の歯面上での移動による歯の剛性 K の変化に加えて周期的な不連続性を有する。2対の歯で接触する場合(噛み合い長さ l の点Aとその点から1ピッチの距離 $l+t_e$ にある点Bで接触)には、それぞれの点で荷重分担率が異なり、2点のたわみが等しくなるものと仮定し、噛合い剛性は単純に2点の歯の剛性の和として求める。そこで、1噛合い周期における噛合い剛性の変化は噛合い率 ε および歯の剛性係数 $K(l)$ を用いて、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} k(l) &= K(l) + K(l+t_e) & ; & \quad 0 < l(\tau_g) < \varepsilon' t_e \\ k(l) &= K(l) & ; & \quad \varepsilon' t_e < l(\tau_g) < t_e \end{aligned} \right\}, \quad \varepsilon' = \varepsilon - 1 \quad (8)$$

また、遅れ側で接触する場合は式(8)中の l を式(6)を用いて遅れ側の噛合い長さ $\tilde{l}$ に変更すればよい。

3・3 噛合い部のたわみの導出

本節では噛合い部のたわみ δ を導く。前節では定常回転角 $\Omega_i t$ のみを考慮して噛合い長さの定常成分 l を導いたが、本節ではさらに変動変位 x_i, y_i, ϕ_i の影響を考慮した噛合い長さの変動成分 l'_i を導く。その上で歯車 i の噛合い長さ $L_i (= l + l'_i)$ から噛合い部に生じるたわみ δ を導く。本節では前節で無視していたバックラッシの影響も考慮し、 $l'_i = 0$ のときは、駆動歯車の歯の、進み側と遅れ側には、法線方向バックラッシの半分の遊び $c_n/2$ がそれぞれ存在しているものと仮定する。

3・3・1 歯車の変動変位まで考慮した噛合い長さの導出

ここでは、歯車の変位 x_i, y_i, ϕ_i の関数として噛合い長さの変動成分 $l'_i, \tilde{l}'_i$ まで考慮した噛合い長さ $L_i, \tilde{L}_i$ を導出する。図4は定常回転角のみ考慮した場合の歯車1の接触点 A_1 が変動変位 x_1, y_1, ϕ_1 の影響で作用線上を A'_1 まで

Fig.4 Shift of contact point due to deflection of shaft ($A_1 \rightarrow A'_1$)

Fig.5 deflection of gear surface considered a backlash

移動する様子を示している。図4には歯車1の進み側の接触点の移動の様子を示しているが、この他の場合も同様に考えることができ、遅れ側で接触する場合 A_i, A'_i は $\tilde{A}_i, \tilde{A}'_i$ となる。接触点の移動は作用線に対して平行な方向の移動のみを考慮し、作用線に対して垂直な方向の移動は無視している。この時噛合い長さの変動成分 $l'_i, \tilde{l}'_i$ は以下ようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{進み側: } \left. \begin{array}{l} l'_1 = -x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha + r_{g1} \phi_1 \\ l'_2 = -x_2 \sin \alpha - y_2 \cos \alpha + r_{g2} (-\phi_2) \end{array} \right\} \\ \text{遅れ側: } \left. \begin{array}{l} \tilde{l}'_1 = -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha - r_{g1} \phi_1 \\ \tilde{l}'_2 = -x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha - r_{g2} (-\phi_2) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (9)$$

前節で導出した噛合い長さの定常成分 $l_i, \tilde{l}_i$ および式(9)を用いると歯車 i の変動成分まで考慮した噛合い長さ $L_i, \tilde{L}_i$ は以下ようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{進み側: } L_i = l + l'_i \\ \text{遅れ側: } \tilde{L}_i = \tilde{l} + \tilde{l}'_i \end{array} \right\} \quad (10)$$

3.3.2 接触状態の判別法と歯のたわみの導出

ここでは前項で導出した $L_i, \tilde{L}_i$ から噛合い部のたわみ δ を導く。図5は法線方向バックラッシュ c_n を考慮した噛合い長さ $L_i, \tilde{L}_i$ と噛合い部のたわみ δ との関係を示している。噛合い長さの変動成分まで考慮すると、歯車1と歯車2の噛合い長さは一致せず、図5のように歯が重なる場合が出てくる。本報では、この重なった部分の作用線上での長さを噛合い部のたわみ δ として定義し、二つの歯車は噛合い部から剛性係数 k とたわみ δ に応じた反力を作用線方向に受ける。

まず、 $L_1 > L_2 + c_n/2$ のとき、歯の進み側の面における接触がおき、歯のたわみは以下ようになる。

$$L_1 > L_2 + c_n/2 \Rightarrow \delta = L_1 - L_2 - c_n/2 = l'_1 - l'_2 - c_n/2 \quad (11)$$

次に、 $\tilde{L}_1 > \tilde{L}_2 + c_n/2$ のとき、歯の遅れ側の面における接触がおき、歯のたわみは以下ようになる。

$$\tilde{L}_1 > \tilde{L}_2 + c_n/2 \Rightarrow \delta = \tilde{L}_1 - \tilde{L}_2 - c_n/2 = \tilde{l}'_1 - \tilde{l}'_2 - c_n/2 \quad (12)$$

また、以下の条件が成立する場合には、歯面の分離が起こりたわみは生じない。

$$L_1 \leq L_2 + b \cap \tilde{L}_1 \leq \tilde{L}_2 + b \Rightarrow \delta = 0 \quad (13)$$

式 (11) ～ (13) は歯車対の変位ベクトル ϕ を用いて以下のように記述できる.

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{g}^T \phi > c_n / 2 &\Rightarrow \delta = -\mathbf{g}^T \phi - c_n / 2 \\ -\tilde{\mathbf{g}}^T \phi > c_n / 2 &\Rightarrow \delta = -\tilde{\mathbf{g}}^T \phi - c_n / 2 \\ -\mathbf{g}^T \phi \leq c_n / 2 \cap -\tilde{\mathbf{g}}^T \phi \leq c_n / 2 &\Rightarrow \delta = 0 \end{aligned} \right\}, \quad \phi = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \theta_{yi} \\ y_i \\ \theta_{xi} \\ \phi_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \\ 0 \\ -r_{g1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \\ 0 \\ -r_{g1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_1 = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \\ 0 \\ r_{g1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \\ 0 \\ r_{g1} \end{bmatrix}$$

なお $\mathbf{d}_i$ は歯車 i の変位ベクトルであり, $\mathbf{g}_i, \tilde{\mathbf{g}}_i$ は $\mathbf{d}_i$ の各成分を作用線方向に分解する係数ベクトルである.

3.4 非線形噛合い力の導出

前項までに, 歯車の定常回転のみを考慮した噛合い剛性 $k(\tau_g)$ と, 噛合い長さの変動成分およびバックラッシを考慮した噛合い部のたわみ δ を導出した. 本報ではさらに歯の進み側のみで定義されるたわみ速度 $\dot{\delta} = -\mathbf{g}^T \dot{\phi}$ に比例した粘性減衰力が常に作用すると仮定している. 以上を考慮し, 噛合い減衰係数を c とすると噛合い部に作用する噛合い力 W は以下ようになる.

$$W = W_k + W_c, \quad W_k = k(\tau_g)\delta, \quad W_c = c\dot{\delta}, \quad \dot{\delta} = -\mathbf{g}^T \dot{\phi} \quad (15)$$

上式をみると, 噛合い剛性による力 W_k は噛合い剛性 $k(\tau_g)$ が有する係数励振による非線形性と, たわみ δ が有するガタ特性による非線形性の 2 種類の非線形性を有することがわかる. 一方噛合い減衰による力 W_c は常に進み側のたわみ速度 $\dot{\delta}$ と一定値に定められた減衰係数 c を用いているため非線形性は持たない. なお, 実際の計算では減衰係数 c ではなく, 次式で定義される噛合い減衰比 ζ を与えて計算を行っている.

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k_0 m_{eq}}}, \quad m_{eq} = \left\{ \frac{1}{I_1/r_1^2} + \frac{1}{I_2/r_2^2} \right\}^{-1}, \quad k_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\tau) d\tau \quad (16)$$

ただし, m_{eq} は等価質量, k_0 は平均噛合い剛性を示す.

ここまでで噛合い部に作用する非線形噛合い力 W を導いたが, 運動方程式を導くためには噛合い部から歯車に作用する力をベクトルで表す必要がある. 歯車節点に作用する噛合い力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_g$ は噛合い力 W および係数ベクトル $\mathbf{g}_i, \tilde{\mathbf{g}}_i$ を用いて以下のように示される. 二つの歯車は噛合い力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_g$ を介して並進方向とねじり方向に連成する.

$$\left. \begin{aligned} \text{進み側: } \hat{\mathbf{f}}_g &= \mathbf{g}_i W \\ \text{遅れ側: } \hat{\mathbf{f}}_g &= \tilde{\mathbf{g}}_i W \\ \text{歯面分離: } \hat{\mathbf{f}}_g &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

3.5 歯車軸系の運動方程式

本節では前節で導出した非線形噛み合い力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_g$ を用いて, 歯車軸系の運動方程式を導出する. なお, 前節では噛合い部を介して連成した 2 つの歯車節点の運動のみを考えていたが, 本節では歯車節点が噛合い部から受ける影響と回転軸から受ける影響の両方を考慮して運動方程式を導出する.

運動方程式は回転体の運動を扱った文献^{(3), (9)}を参考にして導出した。図 6, 7 に示すように回転軸は任意の数の要素に等分割して取り扱い、各要素は、その両端に質量と慣性モーメントを等分した等価集中円盤を、質量のない線形はりで結合された集中系としてモデル化した。このようにすることで歯車軸系を集中系として取り扱うことができる。

j 番目の節点が歯車節点の場合、歯車節点は噛合い部からの影響と、隣り合うはりの内部節点 ($j-1$ 番目と $j+1$ 番目の節点) からの影響を受けるので、運動方程式は次式ようになる。

$$\begin{aligned}
 M_j \ddot{\mathbf{d}}_j + (\boldsymbol{\Gamma}_{j,i}) \dot{\mathbf{d}}_j - & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{xj}^{-1} \mathbf{L}_{xj}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{yj}^{-1} \mathbf{L}_{yj}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_j^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{d}_{j-1} \\
 + & \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{xj}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{yj}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_j^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{x(j+1)} \mathbf{G}_{x(j+1)}^{-1} \mathbf{L}_{x(j+1)}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{y(j+1)} \mathbf{G}_{y(j+1)}^{-1} \mathbf{L}_{y(j+1)}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_{j+1}^{-1} \end{bmatrix} \right\} \mathbf{d}_j \\
 - & \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{x(j+1)}^T \mathbf{G}_{x(j+1)}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{y(j+1)}^T \mathbf{G}_{y(j+1)}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta_{j+1}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{d}_{j+1} = \mathbf{F}_j + \hat{\mathbf{f}}_g, \quad (i=1, 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_j = \text{diag}[m_j \quad J_j \quad m_j \quad J_j \quad I_j], \quad \mathbf{d}_j = [x_j \quad \theta_{yj} \quad y_j \quad \theta_{xj} \quad \phi_j]^T \\
 \boldsymbol{\Gamma}_{j,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_1 I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_1 I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_{j,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_2 I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_2 I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_j g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_{xj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_j & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{xj} = \begin{bmatrix} \alpha_j & \gamma_j \\ \gamma_j & \beta_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{yj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -l_j & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{yj} = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\gamma_j \\ -\gamma_j & \beta_j \end{bmatrix} \\
 (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) = \left(\frac{l_j^3}{3(EI)_j} + \frac{l_j}{(\kappa GA)_j}, \frac{l_j}{(EI)_j}, \frac{l_j^2}{2(EI)_j}, \frac{l_j}{(GI_p)_j} \right)
 \end{aligned} \tag{18}$$

ただし、 diag はその要素を対角成分に持つ対角行列を示し、 M_j は質量行列、 $\boldsymbol{\Gamma}_{j,i}$ ($i=1, 2$) はジャイロ効果を示す行列、 $\mathbf{d}_j$ は変位ベクトル、 $\mathbf{F}_j$ は重力による強制外力ベクトルである。

j 番目の節点がはりの内部節点である場合は、式 (18) の右辺の非線形噛合いベクトル $\hat{\mathbf{f}}_g$ を取り除けば内部節

Fig.6 Continuum model and Rigid model

Fig.7 Analytical model

点の運動方程式となる。

j 番目の節点が軸の支持部の節点の場合は、はりの内部節点同様に式 (18) の右辺の非線形噛合いベクトル $\hat{f}_g$ を取り除いた上で、左辺第 2 項の $\mathbf{\Gamma}_{j,i}$ の部分に支持部の粘性減衰行列 $\hat{\mathbf{C}}_j$ 、左辺第 4 項の中括弧の中に支持部の剛性行列 $\hat{\mathbf{K}}_j$ を足しこめばよい。なお、 $\hat{\mathbf{C}}_j, \hat{\mathbf{K}}_j$ は式 (19) で示される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_j &= \text{diag} \left[\hat{c}_{xj} \quad \hat{C}_{\theta yj} \quad \hat{c}_{yj} \quad \hat{C}_{\theta xj} \quad \hat{C}_{\phi j} \right] \\ \hat{\mathbf{K}}_j &= \text{diag} \left[\hat{k}_{xj} \quad \hat{K}_{\theta yj} \quad \hat{k}_{yj} \quad \hat{K}_{\theta xj} \quad \hat{K}_{\phi j} \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

さらに、任意の節点に駆動トルクと負荷トルクに相当する調和トルクを印加する。調和トルクは次式で示される。

$$T_j = T_{j0} + T'_j \cos \tau_g \quad (20)$$

4. 数値計算結果

4・1 解析モデルと計算条件

図 7 に、平歯車構造物の解析モデルの模式図を示す。この構造物はモジュール 3、歯数 36、歯幅 36 mm の標準歯車が 1 対と、長さ 7.5 cm、直径 30 mm の中実一様な 6 本の回転軸からなる。2 本の回転軸は 6 つの軸受で支持されており、それぞれ角速度 Ω で定常回転している。

回転軸と歯車の物性値は密度 $7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、ヤング率 206 GPa、ポアソン比 0.3 に設定した。軸の分布粘性減衰は比例減衰を作用させており、 $\alpha=1, \beta=1.0 \times 10^{-7}$ (α は質量行列に関する係数、 β は剛性行列に関する係数) とした。回転軸はそれぞれ 20 の要素に等分割して、3 章と同じ手順で運動方程式を構成した。式 (16) で示される歯車の噛合い減衰比は 0.1 としている。支持節点と歯車節点は図 7 に示すような節点番号 $j(j=1, 2, \dots, 8)$ で呼ぶ。式 (19) で示される支持剛性および支持減衰は以下のように設定した。

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_{xj} = \hat{c}_{yj} &= 10 \text{ N} \cdot \text{s/m}, \quad \hat{C}_{\theta yj} = \hat{C}_{\theta xj} = \hat{C}_{\phi j} = 0 \text{ Nm} \cdot \text{s} \\ \hat{k}_{xj} = \hat{k}_{yj} &= 1.0 \times 10^8 \text{ N/m}, \quad \hat{K}_{\theta yj} = \hat{K}_{\theta xj} = 0 \text{ Nm}, \quad \hat{K}_{\phi j} = 1.0 \times 10^{-1} \text{ Nm} \end{aligned} \right\}, \quad j=1, 2, 4, 5, 7, 8 \quad (21)$$

また、節点 1 と 8 には式 (20) で示したトルクを印加した。印加したトルクの大きさは以下のとおりである。

$$T_1 = 25 + 50 \cos \tau_g \text{ Nm}, \quad T_8 = 25 \text{ Nm}, \quad (22)$$

本章では以上に示したモデルに対して 2 章で示した低次元化法を適用して解析を行った結果を示す。その際、軸の内部節点を線形節点として取り扱い、節点 1~8 を非線形節点として取り扱う。したがって解析モデルの非線形節点の自由度は 40、線形節点の自由度は 570 であり、系の総自由度は 610 となっている。ただし、本報では噛合い部が系全体に与える影響を見るために支持節点の非線形性は考慮していない。

4・2 周波数応答

解析モデルの定常周期解の計算にはシューティング法を適用した。数値積分には RKG 法を用い、時間刻みは $2\pi/1024$ とした。その際、数値積分の過程で歯面の分離や衝突が発生した場合、ニュートン法を用いて正確な分離時刻を求めた上で、文献^{(10),(11)}を参考にして変分方程式の変分量の修正を行ってから、その後の数値積分を行っている。図 8~11 に歯車節点の 2 次の主共振部の周波数応答を示す。グラフの軸はそれぞれ印加した調和トルクの周波数 (下横軸)、回転軸の回転周波数 (上横軸)、作用線上での噛合い部相対変位の最大値 (左縦軸)、抽出した複素拘束モードの組数 (右縦軸) を示している。周期解は外力の周波数を 0.5Hz ずつ変化させながら計算した。黒線が安定解、赤線が不安定解、○印がサドル・ノード分岐点、□印が周期倍分岐点、△印がホップ分岐点、印が抽出した複素拘束モードの組数を表している。

Fig.8 Frequency response of reduction model using 66 pairs of modes

Fig.9 Frequency response of reduction model using 30 pairs of modes

Fig.10 Frequency response of reduction model using 18 pairs of modes

Fig.11 Frequency response of reduction model using method of varying numbers of pairs of modes

この解析モデルの低次元化する前の応答は、計算に膨大な時間を要するため得ることが困難であった。ただし図 8 の、固有振動数が外力の振動数に近い順に 66 組の複素拘束モードを一定抽出して計算した応答と、抽出組数を倍の 132 組にして計算した応答とを比較したところ、大きな変化がみられなかったため、図 8 は低次元化する前のモデルの応答を高精度に再現できていると考えられる。図 8 をみると 625Hz 付近で応答曲線が急に方向を変えて右上に向かって伸びている。これは噛合い剛性が、振幅の小さなうちは進み側のみでの歯面分離（以下片当たりと呼ぶ）に起因したソフト型のばね特性を持っているが、振幅が大きくなるとバックラッシュを超えて遅れ側の歯面での歯打ち（以下両当たりと呼ぶ）も起きるため、ハード型のばね特性を持つようになるためであると考えられる。また 588Hz 付近で応答曲線が切れているところがあるが、この部分は歯車の振動が片当たりから両当たりに遷移する部分であり、連続的な応答曲線の計算が困難であった。これは、この部分で解の特性が急激に変化するためシューティング法で解を得ることが困難であるためであり、今後このように解の特性が急激に変化するような箇所でも応答を連続的に求められるような計算手法の開発が課題となる。

図9, 10はそれぞれ抽出組数を30組と18組に減らして計算した応答である。66組と30組の応答を比較すると、応答曲線の概形はほぼ一致しているが、590 Hz, 600 Hz, 630 Hz 付近の安定判別が異なっている。さらに18組の応答を見ると、630Hz よりも周波数が高い領域では概形はほぼ一致しているが、それ以外の場所では概形がずれており、安定判別の精度は30組の場合よりもさらに悪化している。3つの結果を比較すると、安定判別まで含めた高精度な周波数応答解析を行うために最低限必要なモードの数が、系の振動特性によって変化していることがわかる。

図11は2章で示したモード増減法を適用して計算した応答であり、周波数を変化させる4回に1度、トルクの振動数に固有振動数が近いモードを66組抽出し直し、その中から解析精度に与える影響が小さなモードは式(4)を用いながら随時消去している。その際用いたモードの相対誤差 Δ_{p1} に関する閾値は $e_1 = 0.3 \times 10^{-3}$ 、ねじりのモードの振幅割合 Δ_{p2t} に関する閾値は $e_{2t} = 0.2 \times 10^{-2}$ 、曲げのモードの振幅割合 Δ_{p2b} に関する閾値は $e_{2b} = 0.2 \times 10^{-6}$ とした。図8と図11を比較すると解の特性の変化に対応してモード抽出数が変化しており、効率的な計算が行われていることがわかる。ただしモードを抽出する際に用いた3つの閾値 e_1, e_{2t}, e_{2b} はこの応答を計算するために試行錯誤的に決定したものである。今後は閾値を何らかの指標に基づいて、事前に設定できるような手法の開発が課題となる。

4・3 時刻歴応答

図12, 13には、図8に点線で示した622Hzにおいて計算した、歯車の共通接線上での噛み合い部相対変位の時刻歴波形を示している。黒の実線が低次元化をしない場合、赤の○印は複素拘束モード30組を抽出した場合の結果である。ただし、数値積分の時間刻みは $2\pi/2048$ としており、前節同様に数値積分の過程で歯面の分離や衝突が発生した場合は、ニュートン法を用いて正確な分離時刻を求めた上で、その後の数値積分を行っている。時刻歴波形を見ると、過渡状態及び定常状態においても、わずかなモード数で高精度な解析が行えている。以上の結果から、大部分のモードを消去した上で低次元化を行った場合にも、高速かつ高精度な時刻歴応答の計算が行えることが示された。

Fig.12 Time history response at 622Hz (0~5 cycle)

Fig.13 Time history response at 622Hz (7495~7500 cycle)

4・4 カオス振動、概周期振動

図14, 15, 16には、図8に点線で示した582Hzと583Hzにおいて計算した、噛み合い部相対変位に関するポアンカレ図を示す。3500周期計算後の4000周期分のデータをプロットしており、黒い点は低次元化しない場合、赤い点は複素拘束モードを78組抽出した場合の結果である。ただし、数値積分の時間刻みは $2\pi/2048$ としており、時刻歴波形の計算と同じく、数値積分の過程で歯面の分離や衝突が発生した場合は、ニュートン法を用いて正確な分離時刻を求めた上で、その後の数値積分を行っている。図14, 15に示す582Hzの不安定領域ではカオス振動が、図16に示す583Hzの不安定領域では概周期振動の発生が確認できるが、アトラクターの構造もわずかなモード数で高精度に保存できている。このことからカオス振動の解析や概周期振動の解析においても、本低次元化法の有効性が確認された。

Fig.14 Poincare map at 582Hz

Fig.15 Poincare map at 582Hz

Fig.16 Poincare map at 583Hz

5. 結 言

歯車対を介して回転軸の曲げ振動とねじり振動が連成した歯車軸系の振動解析において、本低次元化法が有効であることを確認するために、平歯車の噛合い部に作用する非線形な噛合い力を導出した。その際、噛合い剛性を持つ係数励振作用と、バックラッシュに起因したガタ特性の2つの非線形性を考慮した。さらに、導出された噛合い力を用いて歯車軸系の運動方程式を導いた。

導出された運動方程式に対して既報⁽²⁾の低次元化法を適用し、歯打ちやカオス振動、概周期振動が発生する、強い非線形性を有する歯車軸系の振動解析に対して、本低次元化法が有効であることを確認した。

文 献

- (1) 近藤孝広, 松崎健一郎, 宗和伸行, 佐々木卓実, “大規模非線形系に対する高性能振動解析手法の開発 (非線形支持された直線状はり構造物の曲げ振動への適用)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 74, No. 747 (2008-11), pp. 2626-2633
- (2) 岩崎真人, 近藤孝広, 松崎健一郎, 宗和伸行, 佐々木卓実, 千代田昭三, “大規模非線形系に対する高性能振動解析手法の開発 (非比例減衰系への適用)”, D&D2009
- (3) 土村慎吾, 近藤孝広, 松崎健一郎, 宗和伸行, 佐々木卓実, 千代田昭三, “大規模非線形系に対する高性能振動解析手法の開発 (非線形支持された回転軸系への応用)”, D&D2008
- (4) 千代田昭三, 近藤孝広, 松崎健一郎, 宗和伸行, 佐々木卓実, 岩崎真人, “大規模非線形系に対する高性能振動解析手法の開発 (大域的な非線形系への適用)”, D&D2009

- (5) 岩崎真人, 近藤孝広, 松崎健一郎, 宗和伸行, 佐々木卓実, “大規模非線形系に対する高性能振動解析手法の開発 (効率的な高次モード消去法)”, D&D2010
- (6) Singh R., Xie H., and Comparin R.J., “Analysis of automotive neutral gear rattle”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 131, Issue 2, (1989), pp. 177-196
- (7) Kahraman A., and Singh R., “Non-linear dynamics of a spur gear pair”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 142, Issue 1, (1990), pp. 49-75
- (8) 石川二郎, “歯車の歯のたわみについて”, 日本機械学会論文集 Vol. 17, No. 59 (1951-7), pp. 103-106
- (9) 金光洋一・末岡淳男・近藤孝広, “機械力学 - 機械系のダイナミックス - ” 朝倉書店, 2003
- (10) 近藤孝広, 森博輝, 盆子原康博, 綾部隆, “自己同期現象を利用した推進装置 (第 1 法, シューティング法による基本性能の解析と実験的検証)”, 日本機械学会論文集, C 編, Vol.71, No.712, (2005), pp.3351-3358
- (11) Remoco I. Leine and Henk Nijmeijer, Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics Vol. 18, Springer, (2004), pp.101-118