3311

直交不等間隔格子生成手法とその応用

道川 隆士^{*1}, 岩田 維里^{*2}, 鈴木 宏正^{*1}, 大田 栄二^{*3}, 佐藤 裕一^{*4}, 橋間 正芳^{*4}

Computing Non-uniform Rectilinear Grids and Its Application

Takashi MICHIKAWA, Isato IWATA, Hiromasa SUZUKI,
Eiji OHTA, Yuichi SATO and Masayoshi HASHIMA^{*1} The University of Tokyo, Research Center for Advanced Science and Technology
4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8904, Japan

This paper presents a method for computing non-uniform rectilinear grid structure, which is topologically equivalent to a uniform grid with non-uniform pitch size. Our idea is to coarse dense uniform grids created by voxelization methods by removing grid lines iteratively so that topological structure is preserved. In addition, we improve quality of the grids by comparing initial grids. This grid structure is efficient for FDTD (finite difference time domain) method, a popular method for electromagnetic field analysis. We also demonstrate that reasonable result can be computed by the computed grid, although computation time is reduced.

Key Words : Computer-aided design, Non-uniform rectilinear grid, FDTD method, Voxelization

1. 緒 言

PC や携帯電話等の電子機器は、WiFi 等の電波を発信するため、相互干渉を防ぐように設計する事が求められる。このような問題を検出する手段として電磁場解析の重要性が高まっている。電磁場解析の一般的な解法として FDTD(Finite Difference Time Domain)法⁽¹⁾がよく知られている。FDTD 法とは、Maxwell 方程式を空間および時間方向に離散化させて解く手法である。

FDTD 法における問題の一つに、計算領域の離散化方法が挙げられる。最も簡単なものは、3次元形状からボクセル化によって一様な直交格子（グリッド）を生成する方法⁽²⁾である。しかし、このアプローチは、精度と計算時間のトレードオフの問題を抱えている。例えば、高解像度の格子では、膨大な計算時間を要する。一方、粗い格子では、計算時間は少なくなるものの、生成される格子の接続性がかわることで計算条件がかわってしまう。このように、FDTD 法では、精度を保持しつつ、高速に計算できるような最適な解像度をもった格子を生成することが重要な問題となっている。

精度と計算時間のトレードオフを解決する方法の一つに、解像度の異なる格子を組み合わせる方法⁽³⁾⁽⁴⁾が挙げられる。この方法の良い点は、局所的に解像度を調節できる点である。しかし、格子のセルの解像度が異なる場所は、補間等による後処理が必要なため、精度の保持が難しいという問題点がある。これは、ソルバ自体の変更を伴うものであり、このデータ構造に基づく手法がいくつか提案されているものの、実用的な段階に達していない。

もう一つの方法は、直交格子と同じ位相を持ちつつも、セルのピッチの幅を変えた格子（直交不等間隔格子）を生成する方法である。直交不等間隔格子は、局所的な疎密が、全体に影響を与えることから、精度よく大幅に簡略化する事は困難である。しかし、位相構造が直交格子と同じであるため、従来の FDTD 法ソルバをそのまま

^{*1} 正員，東京大学（〒153-8904 東京都目黒区駒場 4-6-1）

^{*2} 東京大学大学院 精密工学専攻

^{*3} 富士通アドバンステクノロジー

^{*4} 富士通研究所

E-mail: michi@den.rcast.u-tokyo.ac.jp

適用できる。そのため、実用的な観点からみると直交不等間隔格子生成手法に対する要求は高い。その一方で、その生成手法は確立されていない。例えば、Image retargeting⁽⁵⁾等は画像の特徴を保持したまま解像度を変化させることが出来るが、特徴の位置関係が保持されないため、解析用途では使用できない。

本稿では、直交不等間隔格子を生成する手法を提案する。本手法は、十分な解像度を持ったボクセルモデル（2次元の場合は2値画像）を入力とする。これらのデータは、従来のボクセル化手法等によって計算できる。提案手法は、この入力ボクセルモデルから初期直交等間隔格子を生成し、格子の境界を構成する格子面を削除することで直交不等間隔格子を作成する。格子面を削除する時、その格子面をはさんで両側にあるセルは統合されるが、格子上で定義された形の位相を保持するように値を決定する。直交不等間隔格子は、この処理を繰り返す事で生成する。削除する格子面の順序は、格子面に対して設定した誤差関数の小さい順番に削除することで、初期格子に近似した格子を生成する。また、格子の細分割、初期格子値のマッピング、格子面の移動手法を提案する。これらは、解析条件や近似精度の向上を目的とした最適化手法であり、単純に格子面を削除した場合と比較して近似精度向上に貢献する。

提案手法は、ボクセルを用いて計算するため、実装が非常に簡単である。また近似精度の制御も可能である。また、格子面削除前後の位相保存を保証することで、計算結果の位相が初期格子と同じであることを保証する。本稿では、2次元および3次元形状から直交不等間隔格子を作成出来る事を示す。

提案手法で作成した直交不等間隔格子は、FDTD法の高速化に貢献する。本稿では、実際に本手法を用いて計算した格子を用いて電磁場解析を行った結果についても述べる。実験の結果、初期格子と比較して18%程度のセル数で直交不等間隔格子を定義でき、初期格子と同等の結果を5倍程度高速に計算できる事を確認した。

2. 提 案 手 法

提案手法は、大きく分けて、ボクセル化、格子面の削除、後処理からなる。図1に提案手法の概要を示す。簡単のため、以下では2次元で説明するが、3次元格子も同様に計算できる。

Fig.1 An overview of our method

ボクセル化では、入力形状 M から初期格子 M^0 を生成する(図 1(b)). ここで行うボクセル化は、一様にサンプリングするものであり、既存手法を用いる。このとき、 M^0 は、 M と位相が同じになるように十分な解像度でサンプリングされているものとする。各セルには、1(前景)または0(背景)の値が入る。

格子面の削除処理では、グリッド面を繰り返し削除して不等間隔格子を生成する。各ステップにおいて、グリッド面(2次元の場合は線) g_j を選択し(図 1(b)の赤色の線)、 g_j をはさんで両側にあるセルを形状および位相が保存されるようにマージして M^1 を生成する(図 1(c)). この処理を n 回繰り返して M^n を生成する(図 1(d)).

M^n の精度を向上させる最終処理は3つのプロセスからなる。格子の細分割(図 1(e))は、背景格子の厚みを保持するために実行される。図 1(e)の赤い線が追加された格子面である。初期格子のマッピング(図 1(f))は、前ステッ

ブで計算した格子と初期格子の値を比較する。図 1(f)では、赤いセルがマッピングの結果変更されたセルである。最後に格子面（図 1(g)の赤線）を移動させることで近似精度を向上させる。

ボクセル化は既知であるので、以下では、残りの 2 つの処理について詳細を述べる。

2・1 格子面の削除

格子面の削除処理は、直交不等間隔格子 M から格子面 g を削除して、粗い直交不等間隔格子 M^{+1} を生成する。 g を挟むセルのペアは、位相構造が保持されるようにマージされる。マージ処理は、格子面の片方のセルの値をもう一方のセルに上書きする事で行う。この時 2 通りの処理が考えられるが、位相構造を保持しつつ、幾何学的に形状に近い方を選択する。この評価は次に述べる誤差関数の小さい方を採用する。

誤差関数は、 M と、 M から g を削除することで得られる格子 $M(g)$ を比較する事で行う。誤差関数は、位相誤差と幾何誤差からなる。

位相誤差 $E_t(g)$ は、両者の前景／背景コンポーネント数の差の絶対値の和で式 1 の通り定義される。

$$E_t(g_j) = |f_i - f(g_j)| + |b_i - b(g_j)|, \quad (1)$$

$f_i, f(g_j), b_i, b(g_j)$ は、それぞれ、 M , $M(g)$ の前景コンポーネント数、 M , $M(g)$ の背景コンポーネント数である。

幾何誤差 $E_g(g)$ は、 M^0 , $M(g)$ をボクセルと見た場合の xor(排他的論理和)をとった時のセル数であり、式 2 の通り定義される。

$$E_g(g_j) = \text{xor}(M^0, M(g_j)) / |M^0|, \quad (2)$$

ただし、 $|M^0|$ は、 M^0 のセル数であり、 $E_g(g)$ が 1 以下になるように正規化させるために使う。誤差関数 $E(g)$ は、位相誤差と幾何誤差の和によって式 3 の通り定義される。

$$E(g_j) = E_t(g_j) + E_g(g_j). \quad (3)$$

$E(g)$ は 1 以下であるため、 $E(g) > 1$ の時格子面の削除によって位相が変化すると見なすことが出来る。

格子面の削除順は、 $E(g)$ が最も小さい g から順番に行う。格子面の削除によって、形状が変わるため、一部の格子面の誤差関数の値は変化する。そのような格子面に対しては、誤差関数の再評価を行う。

2・2 後処理

前項で述べた格子面の削除は、局所的な処理を行うため、最終結果が入力格子から離れてしまう恐れが有る。しかし、本手法の出力は、直交格子であり、入力格子と容易に対応関係を構築する事が出来る。本項では、この事を利用した、3 つの後処理、細分割、初期格子のマッピング、格子面の移動について述べる。

細分割処理は、前景／背景セルの格子幅を一定以上にするために行う。電磁場解析においては、背景セルの幅が 2 セル未満の場合、精度に影響を及ぼすことがわかっている。本手法では、セルの幅が 1 セルの箇所を検出し、該当部分のセルを分割する。マッピングでは、計算結果の格子構造に初期格子をマッピングする。計算結果の各セルは、初期格子のセルと 1 対 n の対応関係を保持している。計算結果の格子のセルの値は、対応する初期格子のセルの値によって決定する。例えば、前景セルの数が多い場合は、該当する計算結果のセルを前景セルで置き換える。最後の格子面の移動は、格子面を移動することで近似精度が向上する時に行う。

3. 結 果

3・1 実験結果

本手法を用いて計算した結果を図 2-5 にそれぞれ示す。図 2 は 2 次元格子の計算結果、図 3-5 はポリゴンデータから 3 次元格子を計算した例である。図中の M^0 , M^1 , M^2 はそれぞれ初期格子、格子面の削除が終わった状態の格子、後処理終了後の格子である。表 1 に計算時間や精度等の計算結果を示す。本実験は、Core-i7 3930K(3.2GHz), RAM64GB を載せた WindowsPC 上で行った、

表 1 における τ は、直交不等間隔格子の近似精度を評価するものである。これは、格子の境界セル $\mathbf{c}_i^*$ と最も近い M^0 上の点 $\mathbf{c}_i^0$ の距離の総和として式 5 で定義される。

$$\tau = \frac{1}{n \text{diag}(M^0)} \sum_i^n \|\mathbf{c}_i^* - \mathbf{c}_i^0\|, \quad (3)$$

ただし、 n , $\text{diag}(M^0)$ はそれぞれ M^0 のセルの総数、対角線の長さである。表 1 から、後処理によって近似精度が向上していることが確認できる、一方、視覚的な品質については、図 2-5 を見てわかるとおり、斜め線にジャギ一状のアーティファクトがあることが確認できる。これは、直交不等間隔格子が軸平行では無い特徴の保存を苦手としているためである。

計算時間については、セル数の増大の伴い計算時間が増えている事が確認できる。これは、格子面の削除毎に全ての格子面について誤差関数を再評価しているためである。ここは最適化の余地が有り、今後の課題である。

3・2 FDTD 法への適用結果

本項では、本手法で計算した格子を用いて FDTD 法を適用した結果について述べる。本研究では、図 2 の例題に対して、中心付近にある配線に励振波源を印加し、解析領域内の電磁場を計算した。図 6 に解析のモデル回路を示す。この処理を初期格子と直交不等間隔格子に対してそれぞれ計算した。実験環境は、クラスタ環境 (Xeon 5160 (3.0GHz * 2core) * 2CPU * 24 nodes) のクラスタ環境で行った。性能評価は、近端クロストーク(NEXT)のピーク値の誤差によって行った。計算結果を図 7 と表 2 に示す。

表 2 に示す通り、近端クロストークのピークの誤差は、0.6%程度であった。CAE エンジニアのコメントによると、誤差が 5%以内であれば実用上問題ないということであり、提案手法が、近端クロストークの解析に有効であることがわかった。一方、解析時間や使用メモリ量は、それぞれ 80% 以上削減されている。これは、セル数にほぼ比例していることから提案手法が FDTD 法において有益であることを確認できた。

4. 結 語

本稿では、直交不等間隔格子の生成手法を提案した。提案手法は、格子面の逐次的な削除により、位相構造を保持しながら、初期格子を近似した不等間隔格子生成を実現する。また、生成した格子を実際に FDTD 法に適用した結果、初期格子と同等な結果をセル数に比例した速度で計算できることを確認した。

現在の実装では、各ステップで全ての格子面の誤差を評価しているため、大規模データ、特に 3 次元データにおけるパフォーマンス低下が問題として残っている。必要最小限の格子面についてのみ誤差関数を再計算できるよう、手法を最適化させることが今後の課題として挙げられる。

Fig. 2 Result (Circuit board)

Fig. 3 Result (Mechanical part)

Fig. 3 Result (Horse)

Fig. 4 Result (Water jacket)

Table 1 Statistics

Data	Size			Error(τ)		Time (sec.)		
	M^0	M^0	M^*	M^0	M^*	Coarsening	Post	Total
Fig.2	775x417	266x243	371x286	0.00023	0.00017	6.38	1.11	7.49
Fig.3	232x36x220	56x35x76	62x35x80	0.036	0.003	2297.15	4.18	2301.33
Fig.4	45x58x28	24x28x20	25x35x22	0.140	0.110	36.45	0.38	36.83
Fig.5	232x84x138	54x34x40	86x37x52	0.095	0.019	3334.63	0.78	3345.41

Table 2 Statistics of FDTD simulation

	M ⁰	M [*]
Size of analysis range	1238x875x70	468x423x70
Cells (Million)	74.6	13.6
Ratio of cells to M0[%]	100.0	18.2
Analysis time[nsec.]	15	
Calculation time[min.]	112.0	23.5
Ratio of alculatation time to M0[%]	100.0	21.0
Memory[GB]	5.5	1.0
Ratio of memory to M0[%]	100.0	18.3
NEXT peak[mV]	206.4	207.6
NEXT peak error[mV]	-	1.20
Ratio of NEXT peak error to M0[%]	-	0.6

文 献

- (1) Yee, K. S., "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell equations in isotropic media", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Volume 13, Issue 4 (1966), pp. 302–307
- (2) W. Heinrich, K. Beilenhoff, P. Mezzanotte, and L. Roselli, "Optimum mesh grading for finite-difference method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 44, No. 9 (1996), pp.1569-1574
- (3) O. Podebrad, M. Clemens, and T. Weiland, "New subgridding scheme for the finite integration technique". *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 39, No. 3(2003), pp.1662-1665
- (4) D. Haumont and N. Warzee, "Complete polygonal scene voxelization", *Journal of graphics, GPU, and game tools*, Vol. 7 No. 3(2002), pp.27-41
- (5) S. Avidan and A. Shamir, "Seam carving for content-aware image resizing", *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 26, No. 3 (2007)