減圧を受ける単一球形気泡の安定・不安定の解析と実験

Analysis and Experiment on the Stability of a Spherical Bubble in a Decompressed Condition

○ 于涛 (北大院) 学 島津陽介 (北大院) 正 藤川重雄 (北大)
正 矢野猛 (北大) 正 早川道雄 (北大)Tao YU, Hokkaido University, Sapporo 060-8628, Japan
Yousuke SHIMAZU, Hokkaido University
Shigeo FUJIKAWA, Hokkaido University
Takeru YANO, Hokkaido University
Michio HAYAKAWA, Hokkaido University

Key Words: Cavitation, Dynamical system, Inception, Stability, Saddle point

1. はじめに

キャビテーションの分野では、気泡核がある条件下で際限なく膨張する現象を、キャビテーション初生といっている⁽¹⁾。キャビテーション初生は古くから理論的、実験的に研究されているが、理論的には完全に解明されていない。本研究は、非線形力学の方法を用いてキャビテーション初生についてのさらに深い理解を得ることを目的としている。

2. 理論解析

2.1 安定・不安定の理論

単一球形気泡の運動を記述する Rayleigh-Plesset の方程式は下式のように与えられる。

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ (p_{\infty} - p_v' + \frac{2\sigma}{R_0}) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_{\infty} + p_v' - \frac{4\mu\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} \right\} \quad (1)$$

式(1)を連立一次方程式に書き換えられる。

$$\dot{R} = S \quad (2)$$

$$\dot{S} = \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[(p_{\infty} - p_v' + \frac{2\sigma}{R_0}) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_{\infty} + p_v' - \frac{4\mu S}{R} - \frac{2\sigma}{R} \right] - \frac{3}{2} S^2 \right\} \quad (3)$$

式(2)と(3)を $R = R_n + x$, $S = y$ で線形化し整理すると

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2\sigma}{R_n} - 3\gamma \left(p_{\infty} - p_v' + \frac{2\sigma}{R_n} \right) / \rho R_n^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。式(4)のベクトルの固有値を調べることで、式(4)の解の性質を議論する。

固有値 λ_1, λ_2 は実部が 0、虚部が同じ大きさで異符号をもつ 2 つの複素数である場合、解は相空間で表すと Fig. 1 のように渦心点となる。このとき $p_{\infty} > p_v' - (1 - 1/3\gamma)2\sigma/R_n$ が満足される。

固有値 λ_1, λ_2 は絶対値が等しい異符号の 2 つの実数である場合、解は相空間で表すと Fig. 2 のように鞍状点となる。このとき $p_{\infty} < p_v' - (1 - 1/3\gamma)2\sigma/R_n$ が満足される。

固有値 $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ から $p_{\infty}^* = p_v' - (1 - 1/3\gamma)2\sigma/R_n^*$, $R_n^* = R_0 \left(3\gamma (p_{\infty} - p_v' + 2\sigma/R_0) / (2\sigma/R_0) \right)^{1/(3\gamma-1)}$ が得られる。この

とき特異点が鞍状点・結節点の分岐点となり気泡は臨界点となる。この圧力はキャビテーション初生の臨界圧力 p_{∞}^* としてこれまでに知られているものである。

2.2 非線形効果の検証

2.1 で行った線形解析では、解の全体的な挙動を理解することができない。式(1)の右辺は特異点の集合であり Fig. 3 のように表される。 p_{∞}^* と p_v' の間で一本の直線(図中の水平な直線)を引くと、これは特異点の集合曲線と 2 点 A, B で交わる。これは p_{∞} が p_{∞}^* と p_v' の間の値をとるとき、(2)と(3)の相空間では 2 つの特異点が共存することを意味している。

前述の方法を使うことにより、 p_{∞} が p_{∞}^* と p_v' の間の値をとるとき、 (R, S) の相空間は渦心点と鞍状点が共存することがわかった。気泡が減圧を受けて膨張するとき、気泡の運動を表す軌道は相空間で一本の曲線となる。この解曲線は渦心点の解に乗るか、鞍状点の解に乗るか、周囲圧力の低下の程度に依存している。

Fig. 1

Stable solution

Fig. 2

Unstable solution

Fig. 3 Assembly of singular point

3. おわりに

- (1) これまで知られている臨界圧力および臨界半径は鞍状点・結節点の分岐点である。この臨界圧力を越えると、気泡が際限なく膨張する。
- (2) 周囲圧力が飽和蒸気圧力と臨界圧力の間の値のとき、相空間で渦心点と鞍状点が共存することがある。この場合、気泡の軌道が渦心点になるか鞍状点になるかは、周囲圧力の低下の程度に依存している。キャビテーション初生は鞍状点で起こる。

参考文献

- (1) 加藤洋治, 新版キャビテーション基礎と最近の進歩, 槇書店(1999).
- (2) 島津陽介, 日本機械学会北海道学生会, 第 34 回学生員卒業研究発表講演会, 講演論文集.