高レイノルズ数乱流境界層における変動速度確率密度関数型の 不変性と大規模構造について

Invariant assumption of velocity PDF and its relation to large scale structures in High-Reynolds number turbulent boundary layers

正 和田 裕貴 (名古屋大) 〇正 辻 義之 (名古屋大)

Yuki Wada, Department of Energy Engineering and Science, Nagoya University, Nagoya 464-8603, Japan
Yoshiyuki Tsuji, Department of Energy Engineering and Science, Nagoya University, Nagoya 464-8603, Japan

Mean velocity profile in the turbulent boundary layer is studied by using the PDF equation of velocity fluctuations. In the overlap region, following the experimental observation that the PDF of stream wise velocity fluctuations has a self-similar profile, the relation between mean and turbulent intensities are derived. We confirmed the reliability of this equation in comparison with the turbulent intensity distribution derived from the attached eddy model in high Reynolds number flow.

Key Words: turbulent boundary layer, probability density function of velocity, large scale structure

1. はじめに

圧力勾配のない平板乱流境界層における平均速度分布型についてこれまで考察を進めてきた。境界層方程式を近似的に解くために、流れ方向速度の確率密度関数 (PDF と略記) 型が不変になることを仮定することから (PDF 不変仮説)、PDF 方程式を介して半理論的な考察をおこなった[1]。その後、高レイノルズ数においてもこの仮説は満たされることを確認し[2]、対数速度分布の妥当性を報告した。

近年の実験技術の進展はめざましく、直接数値計算 (DNS) においては室内実験と同程度の乱流境界層を、Large Eddy Simulation (LES) を用いた大気乱流の計算も試みられている。高レイノルズ数では、境界層中に大規模な組織構造の存在が観測されてきた。そのスケールは境界層厚さの 10 倍から 20 倍に及ぶという報告もある。そのなかでも Super Structure (SS と略記) は、壁近くのせん断応力や物質輸送に大きな影響を与えることが報告されている[3]。

本研究では、PDF 不変仮説を介して導かれる対数速度分布と大規模構造との関連について考察する。

2. PDF 不変領域

流れ方向変動速度 u' をその標準偏差 σ で無次元化した速度を $u = u'/\sigma$ として、壁からの距離 y における PDF を $p_y(u)$ とあらわす。PDF 型が互いに類似する領域を定量的に判断する指標として、ダイバージェンス $D(p_y \| p_{y'})$ を利用する。

$$D(p_y \| p_{y'}) = \sum_u P_y(u) \times \log(P_y(u)/P_{y'}(u)) \quad (1)$$

従って、位置 y と y' における PDF 型が同一であれば、ダイバージェンスはゼロとなる。また、類似度が高いほど小さな値を示す。Figure 1 には、高レイノルズ数乱流境界層におけるダイバージェンスの等値面を示した。オーバーラップ領域において小さな値を示すことが確認される。ガウス分布との類似性としてダイバージェンスを計算すると、より明確に PDF 型が類似する領域 ($y_s^+ \leq y^+ \leq y_e^+$) を抽出できる。その始まりは、 $y_s^+ \cong 150$ 、終わりは $y_e^+ \cong 0.049\Delta^+$ (ただし、 Δ は Rotta-Clauser 境界層厚さ) と見積もられる。境界層厚さを用いると、 $y_e^+ \cong 0.3\delta_{99}^+$ となる。高レイノルズ数になる

と、PDF 型の類似度はより高くなり、不変になることが期待され、これを PDF 不変仮説と呼ぶことにする。また、PDF が互いに類似する領域 ($y_s^+ \leq y^+ \leq y_e^+$) も PDF 不変領域と呼ぶこととする。

Fig.1 Contour plot of KL-divergence. Probability density functions of streamwise direction is analyzed at $Re_\theta = 13600$.

3. 普遍速度分布の導出

壁近くで近似される PDF 方程式を、PDF 不変仮説のもとで変形することから、平均速度 U と変動速度の rms 値 u_{rms} の間になりつつ関係式が導出できる[1,2]。

$$\frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} + C u_{rms}^+ \frac{\partial u_{rms}^+}{\partial y^+} = \varepsilon, \quad C = -\langle uv \rangle / u_{rms}^2, \quad (2)$$

ここで、 ε は微小量であり、レイノルズ数が十分に大きくなると、 $\varepsilon \rightarrow 0$ となることが期待される。しかし、式 (2) の関係を実験的に調べることは、それほど容易なことではない。レイノルズ応力分布は、計測機器の空間分解能の影響を強く受けるため、正確な値を算出できないためである。そこで、近年の DNS の結果[4]を利用して式 (2) を検証してみる (Fig.2 参照)。 ε は確かにレイノルズ数とともに減少すること、 C は不変領域の始まりで一定値 C_0 を示し、徐々に外層にむかって増加する傾向がある。

式 (2) は平均速度と変動 rms 値の分布が関連付けられて

いるため、例えば rms 値の分布がわかれば、平均速度分布を導くことができる。著者らはこれまで、

$$u_{rms}^+ = \alpha + \beta_1(y^+ - \gamma_1)^{-1} + \beta_2(y^+ - \gamma_2)^{-2} + \dots, \quad (3)$$

かつ、 $C = C_0$ (一定値) と近似することで、式 (2) から対数速度分布：

$$U^+ = (1/\kappa) \log(y^+) + B, \quad (4)$$

を導出した。ただし、式 (3) の展開が成り立つのは、 $15 < y^+ \leq y_r^+$ であり、不変領域と一致はしない。対数領域は $y_s^+ < y^+ \leq y_r^+$ で成立が期待され、実験データの解析から、 $y_r^+ \cong 0.021\Delta^+ + 96.5$ と見積もられる [2]。

Figure 2 Small residuals in Eq.(2), which are calculated by DNS data [4].

Figure 3 Normalized Reynolds stress distribution in DNS data [4]. Dashed line is the fitting by Eq.(6).

4. Attached eddy model と大規模構造

乱流境界層中の大規模構造を考えるモデルの一つとして、Townsend のアイデアに基づき Perry が具体化した Attached eddy model がある [5]。壁からの距離 y に規定される大きさの渦が、距離に反比例 ($1/y$) する確率で存在することを仮定したモデルである。このモデルから導かれる統計量の分布として、流れ方向速度変動の rms 値が以下の式に従う。

$$(u_{rms}^+)^2 = A_u \log(y/\delta) + B_u, \quad (5)$$

ここで、係数は $A_u \cong -1.25$ 、 B_u は流れ場に依存することが報告されている。その範囲は、 $3\sqrt{\delta^+} \leq y^+ \leq 0.15\delta^+$ と提案され、1 decade の対数関係が確認できるためには、 $\delta^+ \approx 40000$ の極めて高いレイノルズ数が必要であり、通常の室内実験では見出すことができない。Marusic らは、平均速度分布に確認される対数速度分布と式 (4) は同一の範囲で成り立つことを実験データの解析から報告している。

さて、大規模構造に起因する式 (5) と式 (2) から対数速度分布が導かれるのであろうか？対数速度分布が存在する範囲はどうなるのであろうか？式 (2) を解くためには、レイノルズ応力 C の分布 (Fig.2) も知る必要がある。そこで、式 (4)、(5) を式 (2) に代入して、レイノルズ応力の分布を実験値と比較してみる。仮に、式 (4) と式 (5) が両立した場合には、レイノルズ応力は以下の関係式となる。

$$C = \frac{2y^+}{A_u} \left(\varepsilon + \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y^{+2}} \right) = \frac{2y^+}{A_u} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y^{+2}} \right) + \varepsilon_1. \quad (6)$$

ここで、 ε が一定値だとすると、式 (6) は実験値の傾向とは大きく異なる。そこで、 $\varepsilon = \varepsilon_0 + (A_u/2y^+)\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_1 = C_0$ として計算した C を Fig.2 に示した。 ε_0 は微小パラメータとして変化させることで、実験値の傾向をよく再現しているといえる。平均速度の対数則 (式 (4)) は、 $C = C_0$ および式 (3) から導かれる。その上限は y_r^+ である。より高レイノルズ数になると、 $y_s^+ \leq y^+$ の領域で u_{rms}^+ は式 (5) によりよく従うようになる。平均速度プロファイルは、同一の対数則を満たすが、変動 rms 値では異なる統計的分布に従う。これは、オーバーラップ層内においても内層と外層の影響が及ぶ範囲が、高レイノルズ数ほど分離され顕著に表れる結果と予想される。内層と外層の境界あたりには、rms 値の分布に bump が現れることが実験的に観測されるが、この bump の存在自体も高レイノルズ数における高精度の実験や数値計算の結果からさらに考察を進める必要がある。

5. まとめ

乱流境界層中の平均速度分布には、対数速度分布が観測される。変動速度 rms 値の分布として、 $15 < y^+ \leq y_r^+$ の範囲で式 (2) の成立が認められ、その外層では式 (5) の分布が成り立つ。ただし、式 (5) が成立するには $\delta^+ \approx O(10^4)$ の高レイノルズ数が必要である。変動 rms 値の分布が異なる統計分布に従うことは、内層スケールと外層スケールとの分離が高レイノルズ数ほど顕著になることを反映していると考えられる。

- [1] Yoshiyuki Tsuji, Ikuo Nakamura, Probability Density Function In the Log-law Region of Low Reynolds Number Turbulent Boundary Layer, Physics of Fluids, Vol.11, No.3 (1999), pp647-658.
- [2] Y. Tsuji, B. Lindgren, A.V. Johansson, Self-similar Profile of Probability Density Functions in Zero-pressure Gradient Turbulent Boundary Layers, Fluid Dynamical Research, vol.37, pp.293-316, (2005).
- [3] N. HUTCHINS AND IVAN MARUSIC, Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers, J. Fluid Mech. (2007), vol. 579, pp. 1-28.
- [4] Juan A. Sillero, Javier Jiménez, and Robert D. Moser, One-point statistics for turbulent wall-bounded flows at Reynolds numbers up to $\delta^+ = 2000$, PHYSICS OF FLUIDS 25, 105102 (2013).
- [5] A. E. PERRY, S. HENBEST AND M. S. CHONG, A theoretical and experimental study of wall turbulence, J. Fluid Mech. (1986), vol. 165, pp. 163-199.