603 圧電材料の任意方向き裂エネルギー密度 (CED)

Crack energy density in arbitrary direction for piezoelectric material.

○南 秉群 (東大院)

正 渡辺 勝彦 (東大生研)

Byeung-Gun NAM, Katsuhiko WATANABE, Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 4-6-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8505

The concept of Crack Energy Density (CED) for piezoelectric material is generalized to treat a mixed mode crack. CED in arbitrary direction for piezoelectric material is defined first and its fundamental properties are discussed. Path independent expression of CED in arbitrary direction, that is useful to evaluate it, is given and the relationship between CED in arbitrary direction and energy release rate is discussed.

Key Words: Piezoelectric Material, Crack Energy Density (CED) in Arbitrary Direction, Path Independent Integral, Energy Release Rate

1. 緒言

圧電材料は様々な分野で幅広く使用されているがその破壊力学については電界が破壊に及ぼす影響など、直進するき裂にあってもまだ曖昧な点が多く残されており、このこともあってか、圧電材料の混合モード破壊に関する研究は非常に少ない。本研究は先に直進き裂を対象に圧電材料におけるき裂エネルギー密度 (CED) を新たに定義し、その基本的性質を明らかにしたのを受け⁽¹⁾、混合モード破壊を念頭に任意方向き裂エネルギー密度について論じたものであり、まずその定義と、続いて、その径路独立積分表示、エネルギー解放率との関係等を明らかにする。

2. 圧電材料における任意方向 CED の定義

Fig. 1 のような切欠きを有する圧電体において、 X_1 軸を φ だけ回転した x_1 軸の正の部分と x_2 軸とでなす半無限面 (以後 φ 面と呼ぶ) における CED $\mathcal{E}_\varphi$ を、通常材料を対象にする場合⁽²⁾ に倣い

$$\mathcal{E}_\varphi = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} W dx_2 \quad (1)$$

$$W = \int_0^t (\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + E_i dD_i)$$

により定義する。ここで、 σ_{ij} 、 ϵ_{ij} 、 E_i 、 D_i はそれぞれ応力、ひずみ、電界、電気変位、 W は拡張ひずみエネルギー密度とも呼ぶべき量である。 Γ_0^+ は $\rho \rightarrow 0$ の極限においてき裂端の一点となる切欠き端の径路 Γ_0^+ と Γ_0^- のうち φ 面に含まれる部分となる径路であり、 Γ_0^- は $(\varphi - 180^\circ)$ 面に関する径路となる。このようにするとき $\mathcal{E}_\varphi$ は「き裂端の一点のうち任意の φ 面に含まれるき裂端の部分が担う拡張ひずみエネルギー、すなわち、き裂を x_1 軸正方向に進ませるのに寄与する拡張ひずみエネルギーを φ 面内の単位面積当たりで表したものの意味を持つことになる。

Fig. 1 A notch in a piezoelectric material

この $\mathcal{E}_\varphi$ は、ここではその詳細は省略するが、関係諸量の φ 面に関する対称成分と逆対称成分を考えることによりモード I、モード II の各変形寄与分への分離が可能であり⁽²⁾、さらに力学的エネルギー部分 (M) と電気的エネルギー部分 (E) への分離を行うこともできて⁽¹⁾

$$\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{E}_\varphi^I + \mathcal{E}_\varphi^{II} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0^+} W^I dx_2 + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0^-} W^{II} dx_2$$

$$\mathcal{E}_\varphi^I = \mathcal{E}_\varphi^{IM} + \mathcal{E}_\varphi^{IE} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0^+} W^{IM} dx_2 + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0^-} W^{IE} dx_2 \quad (2)$$

$$\mathcal{E}_\varphi^{II} = \mathcal{E}_\varphi^{IIM} + \mathcal{E}_\varphi^{IIE} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0^+} W^{IIM} dx_2 + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0^-} W^{IIE} dx_2$$

のように表現できる。

3. 任意方向 CED の径路独立積分による表示

圧電材料の時刻 0 より t の間の変化に対するエネルギー保存則⁽¹⁾ を回転座標系の位置に関する勾配の形態に表現すると

$$\int_V W_k dV = \int_S (T_i u_i + \phi q_i)_k dS \quad (3)$$

が得られる。ここで、 V と S は対象とする領域の体積とそれを囲む閉曲面を表し、 T_i 、 u_i 、 ϕ 、 q_i はそれぞれ表面力、変位、電気ポテンシャル、表面電荷である。式(3)は Gauss の定理などを用いて

$$w_k = \int_S (W n_k - T_i u_{i,k} - \phi q_{i,k}) dS$$

$$- \int_V \int_0^t (\sigma_{ij,k} d\epsilon_{ij} - d\sigma_{ij} \epsilon_{ij,k} - E_{j,k} dD_j + dE_j D_{j,k}) dV = 0 \quad (4)$$

とも表すことができる。

ここで Fig. 1 のような二次元圧電体を考えるとき閉曲面は閉曲線、体積は面積が対応し、 Γ_0^+ を囲む任意の閉領域 $\Gamma + \Gamma_- - \Gamma_0^+$ の面積を A として、 $k=1$ のときの式(4)は

$$w_1 = \int_{\Gamma + \Gamma_- - \Gamma_0^+} (W n_1 - T_i u_{i,1} - \phi q_{i,1}) d\Gamma$$

$$- \int_A \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - d\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - E_{j,1} dD_j + dE_j D_{j,1}) dA = 0 \quad (5)$$

となる。ここで Γ_- 、 Γ_0^+ 上で $T_i = 0$ 、 $q_i = 0$ (電気的不浸透性条件) であることを考慮すると

$$\int_{\Gamma_0^+} W dx_2 = \int_{\Gamma_0^+} \phi q_{i,1} dx_2 + \int_{\Gamma + \Gamma_-} (W n_1 - T_i u_{i,1} - \phi q_{i,1}) d\Gamma$$

$$- \int_A \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij} - d\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - E_{j,1} dD_j + dE_j D_{j,1}) dA \quad (6)$$

が得られ、上式の左辺を $\mathcal{E}_\varphi(\rho)$ 、右辺を $\mathcal{E}_{j\varphi}$ と置くと

$$\mathcal{E}_\varphi(\rho) = \mathcal{E}_{j\varphi} \quad (7)$$

の関係が成立し、 $\mathcal{E}_{j\varphi}$ 積分は径路独立積分として構成則の制限なく $\mathcal{E}_\varphi(\rho)$ を評価できる積分となる。以上の議論においては構成式にはなら制限がなかったが、特に H を電気エンタルピーとして、構成則が

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i} \quad (8)$$

で与えられる場合

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,k} d\varepsilon_{ij} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_k} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_k} = d\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} \\ E_{j,k} dD_j &= \frac{\partial E_j}{\partial D_m} \frac{\partial D_m}{\partial x_k} dD_j = \frac{\partial E_m}{\partial D_j} \frac{\partial D_j}{\partial t} \frac{\partial D_m}{\partial x_k} = dE_j D_{j,k} \end{aligned} \quad (9)$$

であるので式(6)の右辺の第三項は消える。すなわち

$$\mathcal{E}_\varphi = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} W dx_2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\rho} \phi q_{i,1} dx_2 + \int_{\Gamma+\Gamma_\rho} (W n_1 - T_i u_{i,1} - \phi q_{i,1}) d\Gamma \right\} \quad (10)$$

となる。

式(6)の径路独立積分は様々な形で表現可能であり、特に切欠き端での電気エンタルピーに関して表現すると

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} H dx_2 &= \int_{\Gamma+\Gamma_0} (H n_1 - T_i u_{i,1} + q_i \phi_{i,1}) d\Gamma \\ &\quad - \int_A \int_0^1 (\sigma_{ij,1} d\varepsilon_{ij} - d\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1} - D_{j,1} dE_j + dD_j E_{j,1}) dA \end{aligned} \quad (11)$$

となり、構成則が式(8)で与えられる場合

$$\mathcal{E}_\varphi^H = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} H dx_2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma+\Gamma_0} (H n_1 - T_i u_{i,1} + q_i \phi_{i,1}) d\Gamma \quad (12)$$

が成立する。式(12)は任意方向の電気エンタルピー面密度($\mathcal{E}_\varphi^H$)の意味を持つものであり、特に $\varphi=0^\circ$ の場合には、これまでその適用が試みられている圧電材料の J_e 積分⁽³⁾に一致する。

4. 任意方向 CED とエネルギー解放率との関係

線形弾性圧電体において φ 方向に切欠きが進展するときのエネルギー変化は、Fig. 2の切欠きから体積 ΔV を取り去り、さらに ΔS を自由表面にすることによってFig. 3の状態にすることによって与えられる。すなわち、この変化によって解放されるエネルギー $-\Delta E$ はFig. 2の状態 ΔV が占めていたエネルギーと ΔS に生じていた表面力と表面電荷を解放したときのエネルギーの和となり、 T_i と q_i を ΔV を除いたとき現れる表面に対する表面力と表面電荷として

$$-\Delta E = -\int_{\Delta S} \int_{0 \rightarrow 1} \{T_i du_i + \phi dq_i\} dS - \int_{\Delta S} \int_{1 \rightarrow 2} \{T_i du_i + \phi dq_i\} dS \quad (13)$$

と表せる。ただし、積分径路での0, 1, 2はそれぞれ初期状態, Fig. 2の状態, Fig. 3の状態における量を表す。ここで $\Delta a \rightarrow 0$ とする場合を考えると $T_{i1} \rightarrow 0$, $q_{i1}(\rightarrow 0) - q_{i0}(=0) \rightarrow 0$, $T_{i2}(=0) - T_{i1}(\rightarrow 0) \rightarrow 0$, $u_{i2} - u_{i1} \rightarrow 0$, $q_{i2}(=0) - q_{i1}(\rightarrow 0) \rightarrow 0$ であるので右辺第2項の第1項

Fig.2 Crack front region in φ direction

Fig.3 A kinked notch

は2次微小量となって省略でき

$$-\int_{\Delta S} \int_{0 \rightarrow 1} (T_i du_i + \phi dq_i) dS = \int_{\Delta V} W_i dV = \int_0^\infty \left(\int_{\Gamma_0(x_1)} W_i dx_2 \right) dx_1 \quad (14)$$

であるので切欠きのエネルギー解放率 $G_\varphi^{(a)}$ は

$$G_\varphi^{(a)} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta E}{\Delta a} \right) = \int_{\Gamma_0} W_i dx_2 + \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta S} \int_{1 \rightarrow 2} \phi dq_i dS}{\Delta a} \quad (15)$$

となり、き裂のエネルギー解放率 $G_\varphi^{(c)}$ は

$$G_\varphi^{(c)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} G_\varphi^{(a)} = \mathcal{E}_{\varphi 1} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta S} \int_{1 \rightarrow 2} \phi dq_i dS}{\Delta a} \quad (16)$$

で与えられることになる。これより、任意方向 CED は力学的寄与分と電氣的寄与分に分離できるので、エネルギー解放率についての同様の分離を考えると、その電氣的寄与分については式(16)の右辺第2項も関与するので CED の電氣的寄与分には一致しないが、力学的寄与分については CED の力学的寄与分に一致することがわかる。

CED の力学的寄与分はその定義に従って、あるいは径路独立積分により評価されるが上の事実によるとき圧電体であっても線形弾性体であればき裂のエネルギー解放率は

$$G_\varphi^H = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^\infty \sigma_{i2}(x_1) u_i(\Delta a - x_1) dx_1 \quad (17)$$

によって与えられるのであるから、き裂の特異解が与えられてあれば式(17)を介し評価することも可能となる。

5. 結言

圧電材料における任意方向 CED を定義し、構成則に関係なく任意方向 CED が評価できる径路独立積分を導いた。また線形弾性圧電体の場合における任意方向 CED と任意方向エネルギー解放率の間に成り立つ関係について考察し、それらの力学的寄与分が等しくなることを示した。

参考文献

- (1) 南 秉群, 渡辺 勝彦, 2002 日本機械学会年次大会. (投稿中)
- (2) 渡辺 勝彦, 宇都宮 登雄, 機論, 53-491, A(1987), 1285.
- (3) Y. E. Pak, Journal of Applied Mechanics 57(1990), 647-653.