501 回転ディスク - スピンドル系の振動解析

Vibration Analysis of a Spinning Disk-Spindle System

○正 小林 幸徳 (北大) 正 山田 元 (北大)

准 菊池 隆文 (北大院)

Yukinori KOBAYASHI, Hokkaido University, Kita-13, Nishi-8, Kita-ku, Sapporo

Gen YAMADA, Hokkaido University

Takafumi Kikuchi, Hokkaido University

Keywords: Vibration, Spinning Disk, Disk-Spindle System, Bearing, Finite Element Method

1. はしがき

回転ディスク - スピンドル系は、さまざまな形のコンピュータ記憶装置 (FDD, CD, HDD, DVD) として広範囲にわたって使用されており、近年、多くの研究者がコンピュータストレージ装置における動力学を調査している^{(1)~(2)}。本研究では、ボールベアリングあるいは流体ベアリングで支持されるハードディスク装置を、回転ディスク - スピンドル系としてモデル化し、部分構造の支配方程式を離散化するために、Galerkin 法に基づく有限要素法を用いる。そして、系全体のマトリックス方程式を導出し、数値計算することによって回転ディスク - スピンドル系の振動特性を明らかにする。

2. モデリング

回転ディスク - スピンドル系は、3 枚の弾性ディスクを有する系とする。回転ディスクに関しては、Hamilton の原理を適用し、変位の幾何学的非線形性と剛体運動を考慮した非線形支配方程式を導出する。スピンドルと静止シャフトはそれぞれ Rayleigh はりと Euler はりとしてモデル化する。図 1 に示すように、ディスクは空間固定座標系 $O_1 - x_1 y_1 z_1$ に関して微小剛体運動し、ディスクの中心に回転座標系 $O_2 - x_2 y_2 z_2$ 及び回転円柱座標系 $O_2 - r \theta z$ が配置される。ディスクの回転速度 Ω が一定ならば、ディスクの半径方向変位は軸対称となり、円周方向変位は無視できる。この仮定の下に、変形に関して Kirchhoff の仮説が成り立つとすると、ディスクの任意の点 (r, θ, z) における変位は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= u_D(r) - z \frac{\partial w_D(r, \theta, t)}{\partial r}, \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= -z \frac{\partial w_D(r, \theta, t)}{r \partial \theta}, \\ u_z(r, \theta, z, t) &= w_D(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 u_r, u_θ, u_z はそれぞれ、ディスクの面内半径方向、面内円周方向、面外方向の変位であり、 u_D, w_D はそれぞれ、ディスクの中央面における面内半径方向、面外方向の変位を表す。

ディスクの高速回転は、面外方向変位と面内半径方向変位間の連成効果を増加させる。この連成を考慮してディスクの動的特性解析を行うために、von Karman の非線形ひずみ - 変位関係式を用い、Hamilton の原理を適用すると、次の非線形運動方程式が得られる。

Fig.1 Coordinate systems of a spinning disk

$$\begin{aligned} \rho_D h_D \ddot{X}_D &= 0, \quad \rho_D h_D \ddot{Y}_D = 0 \\ \rho_D h_D \left(\ddot{Z}_D + \frac{\partial^2 w_D}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \\ \rho_D h_D \left(\ddot{\theta}_x r^2 \sin^2 \theta + \Omega \dot{\theta}_y r^2 + \Omega^2 w_D r \sin \theta \right) &+ \rho_D h_D \left(\frac{\partial^2 w_D}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta^2} \right) r \sin \theta = 0 \\ \rho_D h_D \left(\ddot{\theta}_y r^2 \cos^2 \theta - \Omega \dot{\theta}_x r^2 - \Omega^2 w_D r \cos \theta \right) &- \rho_D h_D \left(\frac{\partial^2 w_D}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta^2} \right) r \cos \theta = 0 \quad (2) \\ \frac{q_r - q_\theta}{r} + \frac{\partial q_r}{\partial r} + \rho_D h_D \Omega^2 (r + u_D) &= 0 \\ \rho_D h_D \left(\ddot{Z}_D + \frac{\partial^2 w_D}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w_D}{\partial \theta^2} \right) &+ \rho_D h_D \left\{ \left(\ddot{\theta}_x r \sin \theta - \ddot{\theta}_y r \cos \theta \right) + 2\Omega \left(\dot{\theta}_x r \cos \theta + \dot{\theta}_y r \sin \theta \right) \right\} \\ + \frac{E_D h_D^3}{12(1 - \nu_D^2)} \nabla^4 w_D - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(q_r \frac{\partial w_D}{\partial r} + q_\theta \frac{\partial w_D}{\partial \theta} \right) \right\} &- \frac{\partial}{\partial \theta} \left(q_\theta \frac{\partial w_D}{r \partial \theta} + q_r \frac{\partial w_D}{\partial r} \right) = 0 \end{aligned}$$

ただし、 h_D と ρ_D はディスクの厚さおよび密度、 E_D と ν_D はディスクのヤング率およびポアソン比であり、 Z_D は空間

Fig.2 Disk-spindle- ball bearing-shaft system

固定座標系に対する回転座標系の原点の z_1 方向における並進変位である。また $q_r, q_\theta, q_{r\theta}$ は中央面単位幅当たりの合応力であり、 ∇^2 は極座標における Laplace の演算子である。ディスクは内半径 a_D で固定、外半径 b_D で自由とすると、境界条件は

$$\begin{aligned} r = a_D: \quad u_D = w_D = \frac{\partial w_D}{\partial r} = 0 \\ r = b_D: \quad q_r = -D_2 \frac{\partial \nabla^2 w_D}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} = M_r = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

と与えられる。ただし $M_r, M_{r\theta}$ は中央面単位幅当たりの合モーメントである。紙面の都合上、スピンドルとベアリングの運動方程式に関する詳細は省略する。導出された各要素の方程式は Galerkin 法に基づく有限要素法に基づいて離散化される。

図2に本研究で取扱うディスク - スピンドル - ボールベアリング - シャフト系を示す。幾何学的な拘束条件式を用いると、系全体のマトリックス方程式が以下のように導かれる。

$$\mathbf{M}_I \ddot{\mathbf{x}}_I + \mathbf{G}_I \dot{\mathbf{x}}_I + \mathbf{K}_I \mathbf{x}_I = \mathbf{0} \quad (4)$$

ただし、 $\mathbf{M}_I, \mathbf{G}_I, \mathbf{K}_I$ はそれぞれ回転ディスク - スピンドル - ベアリング - シャフト系の全体質量マトリックス、全体ジャイロマトリックス、全体剛性マトリックスである。式(4)の解を

$$\mathbf{x}_I(t) = \mathbf{q} e^{\lambda t} \quad (5)$$

と仮定する。ただし、 $\mathbf{q}$ は固有ベクトルである。ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{q}^T & \mathbf{q}^T \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

を用いると、式(4)は次のように書き直すことができる。

$$\begin{bmatrix} -\Omega \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{G}_I & -\mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{K}_I \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (7)$$

式(7)の固有値 λ の虚部が求める回転ディスクの固有振動数となる。

3. 数値計算結果と考察

図3は、図2に示すモデルに関する式(7)に、2段QR法を適用して求めた固有振動数を示す。3枚のディスクの諸元は、いずれも内半径 15mm、外半径 47.5mm、ポアソン比 0.3、板厚 0.8mm、密度 2750kg/m³、ヤング率 7.2×10¹⁰N/m²とした。ディスクはそれぞれ 32 の環状扇形要素（半径方向要素数 2、円周方向要素数 16）に分割し、スピンドルとシャフトははり要素に分割した。クランプとスペーサー、ヨークそして永久磁石は剛体と仮定し、それらの質量と慣性モーメントはスピンドルの要素質量マトリックスに追加した。数値計算に用いたスピンドル、静止シャフトの主な諸元を表1に記載する。なお、ボールベアリングに関しては、Jang らの文献(4)から引用した。

図3の $B(m, n)$, $U(m, n)$ は、それぞれ m 本の節円と n 本の節直径を有するバランスモードとアンバランスモードを表す。また、下付き添え字 b, f はそれぞれ後退、前進歳差モードを示す。回転ディスクのすべての固有振動数が、 balan

Table1 Specifications of spindle and stationary shaft

	Spindle	Stationary shaft
Inner radius [mm]	5	-
Outer radius [mm]	15	2
Height [mm]	13	16.5
Density [kg/m ³]	2.75×10 ³	7.8×10 ³
Young's modulus [N/m ²]	7.2×10 ¹⁰	2.0×10 ¹¹
Poisson's ratio	0.34	0.3

Fig.3 Natural frequencies of a spinning disk system

スモードと正確に一致し、ディスク - スピンドル - ベアリング - シャフト系においてだけ観測されるアンバランスモードを生じさせる。

$U(0,1)$ モードは、スピンドルの剛体回転運動（ロッキング運動）と節直径を 1 本有するディスクが連成する振動モードである。 $B(0,1)$ モードでは、ディスクの変形によって生じる慣性力が釣り合い、重心に関するモーメントが相殺される。すなわち、スピンドルは定常歳差運動を受けず、ディスクのみが変形する振動モードとなる。 $U(0,0)$ モードは、スピンドルの剛体並進運動とそれぞれのディスクの軸対称振動モードとが連成する振動モードであり、 $B(0,0)$ モードは、それぞれのディスクの変位による慣性力が釣り合い、スピンドルが剛体並進運動を受けない振動モードである。

参考文献

- (1) Dopkin, J. A., Shoup, T. E., *ASME J. Eng. Industry*, **96**, (1974), 1328-1333.
- (2) Shen, I. Y., Ku, C.-P.R., *ASME J. Appl. Mech.*, **120**, (1997), 87-94.
- (3) Jang, G. H., Lee, S. H. and Jung, M. S., *J. Sound Vib.*, **251**-1, (2002), 59-78.
- (4) Jang, G. H., et al., *Proceedings of Incremental Motion Control Systems and Devices*, (1996), 167-174.