518 非対称積層長方形板の振動特性

Vibration Characteristics of Un-symmetrically Laminated Rectangular Plates

○学 李 承哲 (北大院)
正 本田 真也 (北大)

学 湯上 訓平 (北大院)
正 成田 吉弘 (北大)

Key Words: Free vibration, Natural frequency, Un-symmetrically laminated plate

Lee Seung-Cheol and Yugami Kumpei, Graduate School of Engineering, Hokkaido University

Shinya Honda and Yoshihiro Narita, Faculty of Engineering, Hokkaido University,

N13W8, Kita-ku, Sapporo, Hokkaido

1. 緒 言

航空機を初め今や自動車にまで広く用いられている繊維強化プラスチック(FRP)材料は、その特徴である高い比強度と比剛性により構造の軽量化に大きく貢献している。基本的な構造要素である FRP 積層平板の振動問題についてはこれまで多くの研究がなされた。従来の研究は対称に積層された積層長方形板の固有振動数と振動モードを求めたものが多いが、非対称積層板の振動解析結果は限られている⁽¹⁻⁴⁾。また解析結果を実験と比較した研究は見受けられず、十分に信頼される結果が報告されていない。本研究では、非対称に積層された長方形板の自由振動に関して、リッツ法による解析方法を示すと共に、モード解析を行い、有限要素法(FEM)プログラムによる結果とも検証する。

2. 解析手法

一般的に、対称に限定されずに積層された積層板のひずみエネルギーは

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \kappa \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \kappa \end{matrix} \right\} dA \quad (1)$$

で表される。ここで、ひずみベクトル

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right\}^T \quad (2)$$

と曲率ベクトル

$$\left\{ \kappa \right\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (3)$$

は、振動変位(振幅) u , v , w により表わされる。また各剛性

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \\ [D] &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \\ D_{ij} &= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (5)$$

が定義されるが、それぞれ面内(伸縮)、面内・面外連成、面外(曲げ)の剛性である。ここで Q は材料定数である。また運動エネルギーの最大値は、固有角振動数を ω として

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \iint_A (u^2 + v^2 + w^2) dA \quad (6)$$

となる。リッツ法では、板領域全体の変位を二重級数

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij} X_i(x) Y_j(y) \\ v(x, y) &= \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{N-1} Q_{kl} X_k(x) Y_l(y) \\ w(x, y) &= \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} R_{mn} X_m(x) Y_n(y) \end{aligned} \quad (7)$$

により表わす。ここで、 P_{ij} , Q_{kl} , R_{mn} は未定係数である。

ここで以降の解析をより簡単に表示するため、無次元量

$$\begin{aligned} \xi &= x / (a/2), \eta = y / (b/2) \\ \alpha &= a/b, \beta = a/h \end{aligned} \quad (8)$$

を導入する。これを使うと、式(7)中の X , Y はそれぞれ x, y 方向の変位を表す関数であり、幾何的境界条件を満たすように、たとえば

$$X_m(\xi) = x^m (1 + \xi)^{BC1} (1 - \xi)^{BC3} \quad (9)$$

のように定める。BC1, ~, BC4 は四つの辺の境界条件を与えるインデックスである。

次にリッツ法では、変位関数(7)を汎関数

$$F = T_{\max} - U_{\max} \quad (10)$$

に代入したのちに、それを極小化する。

$$\frac{\partial F}{\partial P_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial Q_{kl}} = \frac{\partial F}{\partial R_{mn}} = 0 \quad (11)$$

この操作により、振動数パラメータ

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{D_0}}, \quad D_0 = \frac{E_T h^3}{12(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})} \quad (12)$$

を含む振動数方程式

$$\begin{pmatrix} K_{ij\bar{j}} & K_{ij\bar{k}} & K_{ij\bar{m}} \\ & K_{kl\bar{k}} & K_{kl\bar{m}} \\ (sym) & & K_{mn\bar{m}} \end{pmatrix} - \Omega^2 \begin{pmatrix} M_{ij\bar{j}} & 0 & 0 \\ & K_{kl\bar{k}} & 0 \\ (sym) & & K_{mn\bar{m}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P_{ij} \\ Q_{kl} \\ R_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (13)$$

が得られる。つぎに無次元の剛性

$$a_{pq} = (a^2 / D_0) A_{pq}, \quad b_{pq} = (a / D_0) B_{pq} \quad (14)$$

$$d_{pq} = (1 / D_0) D_{pq}$$

を用いて、係数の内容は

$$K_{ij\bar{j}} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left[a_{11} I^{(1100)} + a_{66} \alpha^2 I^{(0011)} + a_{16} \alpha \left\{ I^{(0110)} + I^{(1001)} \right\} \right]_{ij\bar{j}}$$

～(途中省略)～

$$K_{mn\bar{m}} = 4 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[d_{11} I^{(2200)} + d_{22} \alpha^4 I^{(0022)} + 4d_{66} \alpha^2 I^{(1111)} + 4d_{12} \alpha^2 \left\{ I^{(0220)} + I^{(2002)} \right\} + 4d_{16} \alpha \left\{ I^{(1210)} + I^{(2101)} \right\} + 4d_{26} \alpha^3 \left\{ I^{(1012)} + I^{(0121)} \right\} \right]_{mn\bar{m}} \quad (15)$$

式(15)中の I は定積分で厳密に計算が可能である。式(13)の固有値を求めて、振動数パラメータを得る。

3. 実験手法

解析の妥当性を検証するため、炭素繊維及びエポキシ樹脂を用いて試験片を作製し、非対称な積層構成を有する板に関する固有振動数を比較する。試験片の作成は、ハンドレイアップ成形法にて、二枚の型の間に CFRP シートを積層する。電気炉内で 2 時間、温度 120° C にて硬化し、炉内で十分に冷却して完成する。

こうして製作された材料の平板を試験片として、引張試験により得られた材料定数は、

$$E_1 = 125.9 \text{ GPa}, \quad E_2 = 7.053 \text{ GPa}, \quad G_{12} = 4.923 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.3386$$

であった。試験片寸法は、 $a = b = 130 \text{ mm}$ 、板厚は $h = 1.6 \text{ mm}$ 、単位体積当り質量は $\rho = 1500 \text{ kg}$ である。今回の積層構成は対称 8 層として、試験片製作の簡易化のため繊維配向角度は 0°, 90° の 2 通りからなる組合せに限定、[0/90/0/90/0/90/0/90] のクロスプライ逆対称積層正方形板とした。

Fig.1 Free edge condition and experimental apparatus.

Table 1. Comparison in natural frequencies of laminated square plates obtained by the experiment and simulation (Hz, [0/90/0/90/0/90/0/90])

	$\omega 1$	$\omega 2$	$\omega 3$	$\omega 4$	$\omega 5$
Experiment	166.9	596.9	609.5	684.8	692.8
simulation	184.0	628.6	644.2	735.6	735.6
(difference)	10.2	5.3	5.7	7.4	6.2

実験では最も簡単に厳密な境界条件が達成できる全周を自由端とした。このため図 1 のように試験片の中央をウレタンスポンジで支持した。実験モード解析では、インパルスハンマーによる打撃試験を行った。インパルスハンマーは、小野測器社製 GK3100、加速度計は PCB Piezotronics 社製 352C22 である。モード解析ソフトウェアは、Vibrant Technology 社製の ME' scope VES である。

4. 結果と考察

以上の手順に基づいて得られた逆対称クロスプライ正方形板の 1 から 4 次までの固有振動数(Hz)を、表 1 に示す。比較対象として、汎用有限要素法 ANSYS による結果を示す。実験値は、数パーセントの低い値を示しているが、これは作成した試験片の層間接着の不完全さや気孔などに起因すると思われる。

5. 結 言

従来から十分なデータが得られていない非対称 CFRP 積層正方形板について、リッツ法の解析手順を示し、FEM と実験により、信頼性ある固有振動数とモード形を把握した。

参考文献

- (1) C.-C. Lin, W.W. King, Free transverse vibrations of rectangular unsymmetrically laminated plates, J. Sound and Vibration, Vol.36, 1974, pp.91-103.
- (2) T. Kant, et al., Vibrations of unsymmetrically laminated plates analyzed by using a higher order theory with a C° finite element formulation, J. Sound and Vibration, Vol.134, 1989, pp.1-16.
- (3) Y. K. Cheung, D. Zhou, Free vibrations of rectangular unsymmetrically laminated composite plates with internal line supports, Computers & Structures, Vol.79, 2001, pp.1923-1932
- (4) G. A. Vogl, M. W. Hyer, Natural vibration of unsymmetric cross-ply laminates, J. Sound and Vibration, Vol.330, 2011, pp.4764-4779.