エレメント・フリー・ガレルキン法による二次元粘性流動問題の解析

Numerical Analysis for Two-Dimensional Viscous Fluid Flows Using the Element-Free Galerkin Method

正 ○邵 長城(信州大)

正 松田 安弘(信州大)

吉野 正人(信州大)

Changcheng SHAO, Yasuhiro MATSUDA and Masato Yoshino
Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano-shi, Nagano

Key Words: Viscous Fluid Flow, Element-Free Galerkin Method, High Aspect Ratio Node Disposition

1. 緒 言

節点と要素との関連情報を必要としないエレメント・フリー・ガレルキン法(EFGM)⁽¹⁾は構造解析分野において、特に大変形問題や亀裂進展問題の解析によく使用されるようになってきた⁽²⁾。その特徴を生かして流体力学分野での移動境界問題を効率よく解析することが期待できる。本研究では移流拡散問題についての検討結果⁽³⁾を踏まえてEFGMを二次元粘性流れ問題の解析に適用し、特にアスペクト比が高い節点配置を用いた場合での影響領域の形状等について検討した。

2. エレメント・フリー・ガレルキン法による定式化

非定常二次元非圧縮性粘性流れの支配方程式は流れ関数 ψ と渦度 ω により次式で表される。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

ここで、 t ：時間、 u, v ： x, y 方向の流速、 Re ：レイノルズ数である。以下では式(2)を例にEFGMによる定式化について述べる。式(2)にガレルキン法を適用しバック・グラウンド・セルごとに積分すると次式を得る。

$$\sum_{m=1}^M \int \left\{ N_i N_j \frac{\partial \omega_j}{\partial t} + u N_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + v N_i \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \omega_j + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \omega_j + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \omega_j \right) \right\} dx dy \quad (4)$$

ここで、 M ：バック・グラウンド・セル数、 ω_j ：渦度の節点値、 N_i ：形状関数であり、 Σ ：全体マトリックスを作ることを意味する。また (x, y) での渦度は次式により表される。

$$\omega(x, y) = \sum_{j=1}^N N_j \omega_j \quad (5)$$

N ： (x, y) での渦度に影響のある節点の数である。式(4)の面積分をガウス積分に置き換えると次式を得る。

$$\sum_{m=1}^M \sum_{g=1}^G W_g \left\{ N_i N_j \frac{\partial \omega_j}{\partial t} + u N_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + v N_i \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \omega_j + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \omega_j + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \omega_j \right) \right\} \quad (6)$$

ここで、 G ：セル内の積分点数、 W_g ：ガウス積分の重みである。また時間微分項は次式により離散化する。

$$\phi \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\}^{n+1} + (1-\phi) \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\}^n = \frac{\{\omega\}^{n+1} - \{\omega\}^n}{\Delta t} \quad (7)$$

ここで、 ϕ はタイム・スキーム・パラメータであり、 n は時間方向の指標である。結局、得られた連立代数方程式をマトリックスにより表すと次式の定式化を得る。

$$\sum_{m=1}^M \sum_{g=1}^G \left(\frac{[P]}{\Delta t} + \phi([F_x] + [F_y]) + \phi([D_x] + [D_y]) \right) \{\omega\}^{n+1} = \sum_{m=1}^M \sum_{g=1}^G \left(\frac{[P]}{\Delta t} - (1-\phi)([F_x] + [F_y]) - (1-\phi)([D_x] + [D_y]) \right) \{\omega\}^n \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [P] &= [w_g N_i N_j] \\ [F_x] &= \left[w_g u N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right], \quad [F_y] = \left[w_g v N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \\ [D_x] &= \left[w_g \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right], \quad [D_y] = \left[w_g \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

($i, j = 1, 2, \dots, N$)である。

また形状関数については次のように求める。まず式(5)を次式に書き換える。

$$\omega(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (9)$$

各未知係数 $a_0 \sim a_2$ は次式の J が最小となるように求める。

$$J = \sum_{j=1}^N w_j [\omega(x_j, y_j) - \omega_j]^2 \quad (10)$$

なお、 w は重み関数である。

3. 粘性流動問題の数値解析

3.1 計算条件 キヤビッティ内の粘性流れ問題の解析を $\text{Re}=10,000$ まで行った。 $\phi=0.5$ とし、渦度の境界条件として次式により評価した。

$$\begin{aligned} \omega_B &= \frac{2}{a(a+1)^2 h_{xi}^2} \left[\Psi_{NN} - (a+1)^2 \Psi_N + a(a^2 + 3a + 3) \Psi_B \right. \\ &\quad \left. - a(a+1)(a+2)(X_{iB} - X_{iN}) \frac{\partial \Psi}{\partial X_i} \right] + o(h_{xi}^2) \end{aligned} \quad (11)$$

なお、 $a = (X_{iN} - X_{iNN}) / (X_{iB} - X_{iN})$ であり、各添字は図1での各節点の位置を示している。

Fig.1 Nodes in Eq. (11)

また計算の収束性とタイム・ステップ Δt の妥当性を検証するために次式のような相対渦度変化率 δ を検討した。

$$\delta\omega = \text{Max} \left| \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\omega_{i,j}^{n+1}} \right| \times 100 \quad (\%) \quad (12)$$

ただし、次式の条件を付加している。

$$\left| \omega_{i,j}^{n+1} \right| > \left| \omega_{i,j}^n \right|_{\text{max}} \times 0.001$$

節点配置については以下の二通りを考えた。すなわち計算領域を正方形と長方形で分割して、その頂点に節点を置いた。正方形配置の場合には影響領域を半径 ρ の円とし、次式のBelytshkoの4次関数⁽⁴⁾を重み関数として採用した。

$$w(r) = 1 - 6\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + 8\left(\frac{r}{\rho}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{\rho}\right)^4 \quad (13)$$

ここで、 $r = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$ であり、 ρ の大きさについては5個の節点が入るように決定した。なお長方形配置の場合には影響領域を辺長 $2\rho_x$ と $2\rho_y$ の長方形とし、重み関数は次式により表される⁽²⁾。

$$w(x, y) = \left[1 - 6\left(\frac{x}{\rho_x}\right)^2 + 8\left(\frac{x}{\rho_x}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\rho_x}\right)^4 \right] \times \left[1 - 6\left(\frac{y}{\rho_y}\right)^2 + 8\left(\frac{y}{\rho_y}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{\rho_y}\right)^4 \right] \quad (14)$$

ただし、辺長 $2\rho_x$ と $2\rho_y$ は9個の節点が入る長方形の辺長の1.2倍にした。またバック・グラウンド・セルは正方形または長方形と重なるように分割し、各セルの積分点数を 2×2 とした。

図2に $Re=5,000$ で使った長方形節点配置例を示す。ここで α_{max} は長方形の最大アスペクト比である。図3に $Re=5,000$ での、図4に $Re=10,000$ での解析結果を示す。両方とも定常解が得られた。

4. 結 論

エレメント・フリー・ガレルキン法を用いて二次元粘性流動問題の解析を $Re=10,000$ まで行い、特にアスペクト比が高い節点配置での影響領域の形状について検討した。他の研究例との比較により、良好な解析結果が得られることを確認した。

文 献

- (1) T. Belytschko, et al., Int. J. Numer. Methods Eng., 37 (1994), 229.
- (2) T. Belytschko, 日本機械学会第13回計算力学講演会講演論文集, No.00-17(2000), 41.
- (3) 邵・他2名, 日本機械学会2000年度年次大会講演論

- 文集, No.00-1(2000), Vol.II, 5.
- (4) S. Beissel, et al., Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 139(1996), 49.
- (5) Ghia, U. et al., J. Computat. Phys., 48(1982), 387.

Fig.2 Node arrangement (51*51 nodes, $\alpha_{\text{max}}=5.6$)

(a) Square node arrangement (81*81 nodes, $\Delta t=0.005$, Loop=90,000, $\delta\omega=0.002$)
 (b) Rectangular node arrangement (51*51 nodes, $\Delta t=0.002$, Loop=10,000, $\delta\omega=0.006$, $\alpha_{\text{max}}=5.6$)

Fig. 3 Velocity distributions ($Re=5,000$)

(a) Streamline contours

(b) Velocity distributions

Fig. 4 Results using rectangular node arrangement ($Re=10,000$, 101*101 nodes, $\Delta t=0.002$, Loop=239,980, $\delta\omega=0.001$, $\alpha_{\text{max}}=7.1$)