DRM 時間差分境界要素法による異方性材料の非定常熱伝導解析

Dual Reciprocity Time-Finite-Difference BEM for Transient Heat Conduction in Anisotropic Solids

正 田中 正隆 (信州大工)
○学 原 啓志 (信州大院)

正 松本 敏郎 (名古屋大院)
学 黒川 浩太郎 (信州大院)

Masataka TANAKA, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553
Toshiro MATSUMOTO, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya
Keiji HARA, Graduate School of Shinshu University
Kotaro KUROKAWA, Graduate School of Shinshu University

Key Words: Computational Mechanics, Time-stepping Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Transient Heat Conduction, Anisotropic Solid

1. 緒 言

異方性材料の非定常熱伝導問題に対する境界要素法の定式化では、異方性材料に対する基本解が必要であり、さらに導出される境界積分方程式の中に時間ステップごとに見かけの初期条件に由来する領域積分項が残る。この領域積分を評価するためには、領域内部を要素またはセルに分割しなければならないが、領域内部の要素分割にはたいへん手間がかかり境界要素法の特長が半減してしまう⁽¹⁾。また、定式化の際に必要な基本解に時間依存の厳密基本解を用いると、係数マトリックスの計算がかなり複雑となり、計算時間もかかる⁽¹⁾。

そこで本研究では、等方性問題の基本解と時間差分近似を用いる解法について考察する。さらに、等方性問題の基本解を用いる事と時間差分近似に由来する領域積分項を、二重相反法 (DRM)⁽²⁾⁽³⁾を用いることにより境界積分に変換し境界のみの離散化と内部選点のみで解析する。

本報では定式化と開発した解析プログラムによる解析例を示し、本手法の有効性と DRM で用いる関数について検討を行う。

2. 理 論

異方性材料の2次元非定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は、次式で与えられる。

$$k_{11} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} + k_{22} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho c \dot{u}(x, t) \quad (1)$$

ただし、 $u(x, t)$ は温度、 k_{11} , k_{22} , k_{12} は2階対称の熱伝導率テンソルの成分である。 ρ は密度、 c は比熱とし上付きのドット ($\cdot$) は時間による微分を表す。

式(1)に対し等方性問題の基本解を用いるために、次のように熱伝導テンソルを等方性の部分とその他の部分に分ける。

$$k_{ij}^A = k_{ij}^I + k_{ij}^{A-I} \quad (2)$$

$$k_{ij}^A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}, k_{ij}^I = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, k_{ij}^{A-I} = \begin{bmatrix} m_1 & k_{12} \\ k_{12} & m_2 \end{bmatrix}$$

ただし、 M には任意の材料定数を用いてもよいが、ここでは k_{11} , k_{22} の平均値を用いる。式(1)を次式のように表す。

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} = -\frac{m_1}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} - 2\frac{k_{12}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\rho c \dot{u}(x, t)}{M} \quad (3)$$

式(3)の右辺をソース項と見なせばこの式は Poisson 方程式であり、Laplace 方程式の基本解を用いて DRBEM を構築できる。

次に DRM を適用するため、式(3)の右辺を次式で近似する。

$$-\frac{m_1}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} - 2\frac{k_{12}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\rho c \dot{u}(x, t)}{M} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^\ell f(x, z^\ell) \quad (4)$$

ただし、 N は境界節点数、 L は内部選点数、 α^ℓ は未知係数、 $f(x, z^\ell)$ は近似関数、 z^ℓ は DRM 選点を表すものとする。近似関数には観測点と DRM 選点との距離の関数を使用する。ここで、次式を満たす特解を $\hat{u}(x, z^\ell)$ とする。

$$\nabla^2 \hat{u}(x, z^\ell) = f(x, z^\ell) \quad (5)$$

この特解 $\hat{u}(x, z^\ell)$ を用いると式(3)の展開された支配微分方程式は未知係数 α^ℓ と特解 $\hat{u}(x, z^\ell)$ により次式のように書き表すことができる。

$$\nabla^2 u(x, t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^\ell \nabla^2 \hat{u}(x, z^\ell) \quad (6)$$

上式の両辺に基本解 $u^*(x, y)$ をかけ、考察領域全体で積分し部分積分することにより次の積分方程式を得る。

$$c(y)u(y, t) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x, t)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x, t)d\Gamma = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^\ell \left\{ c(y)\hat{u}(y, z^\ell) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^\ell)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^\ell)d\Gamma \right\} \quad (7)$$

ただし、 $c(y)$ はソース点のある境界形状で決まる定数であり、 $y \in \Omega$ のときには $c(y) = 1$ となる。また、 $\hat{q}(x, z^\ell)$ は特

解 $\hat{u}(x, z^\ell)$ の法線方向勾配を表す。次に、異方性問題の熱流束を導入する。異方性問題に対する熱流束は次式で定義される。

$$\begin{aligned} q^A(x, t) &= -k_{ij}^A \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j \\ &= -M \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} - k_{ij}^{A-I} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $q^A(x)$ は熱流束の法線方向成分を表す。よって温度の法線方向勾配は次式で表すことができる。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = -\frac{q^A(x, t)}{M} - \frac{k_{ij}^{A-I}}{M} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j \quad (9)$$

上式を式(7)に代入することにより、異方性問題の熱流束を導入した次の積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} c(y)u(y, t) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x, t)d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{u^*(x, y)}{M} q^A(x, t)d\Gamma \\ + \int_{\Gamma} \frac{u^*(x, y)}{M} k_{ij}^{A-I} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j d\Gamma = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^\ell \left\{ c(y)\hat{u}(y, z^\ell) \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^\ell)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^\ell)d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)の積分方程式をすべての境界節点と内部選点に対して適用することにより $N+L$ 個の式が得られ、マトリックス形式で次式のようにまとめることができる。

$$Hu + \frac{1}{M}Gq + \frac{1}{M}GKu = [H\hat{U} - G\hat{Q}]\alpha \quad (11)$$

ただし、 K は次式で表される $(N+L)$ の正方マトリックスである。

$$K = k_{ij}^{A-I} n_j F_{x_i} F^{-1} \quad (12)$$

ここでさらに、未知係数 α^ℓ を求める。式(4)が全ての境界節点と内部選点に対して成り立つと仮定すると未知係数 α^ℓ を求めることができるが、温度の座標偏微分 $\partial^2 u(x, t)/\partial x_m \partial x_n$ と時間微分 $\dot{u}(x, t)$ について、さらに評価が必要である。まず、温度の座標偏微分に対しては、近似関数を用いて次式のように評価することができる。

$$u_{x_m} = F_{x_m} F^{-1} u \quad (13)$$

同様に、温度の2階座標偏微分は温度の1階座標偏微分を用いて次のように表される。

$$u_{x_m x_n} = F_{x_n} F^{-1} u_{x_m} \quad (14)$$

上式と式(13)より、温度の2階座標偏微分を温度 $u(x, t)$ と近似関数 $f(x, z^\ell)$ の関数として近似することができる。

$$u_{x_m x_n} = F_{x_n} F^{-1} F_{x_m} F^{-1} u \quad (15)$$

また、温度の時間微分に関しては差分近似を適用することにより評価できる。このとき、1ステップ目は直線近似の後退差分近似、2ステップ以降は二次曲線後退差分近似を適用する。前時間ステップの DRM 選点における温度から計算される量を見かけの初期条件として計算を進める。

以上の理論により、各タイムステップにおける $N+L$ 個の境界上の未知量と領域内部の未知温度を、 $N+L$ 個の連立方程式を解くことにより求めることができる。

3. 数値解析例と考察

Fig.1 に示す正方形モデルを考え、境界全体を均等に32個の2次要素を用いて分割する。内部選点は図示のように一様に225点配置する。全境界において温度 $u = 0$ [°C] とし、初期温度は $T(x_1, x_2, 0) = 100\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)$ [°C] であると仮定する。直交異方性を仮定し、 $k_{11} = 120$ [W/mK], $k_{12} = 0.0$ [W/mK], $k_{22} = 60$ [W/mK] とする。また、密度 $\rho = 7800$ [kg/m³], 比熱 $c = 440$ [J/kgK] とする。近似関数には Compactly Supported Radial Basis Function⁽²⁾⁽³⁾ の C^2 級, C^4 級, Thin plate spline, High order thin plate spline, Multiquadric, $1+r^n$ の関数を用いた。タイムステップ幅は $\Delta t = 1$ [s], Compactly Supported Radial Basis Function で用いるサポート半径は $a = 1.42$ [m], Multiquadric で用いる定数は $c = 0.2$ で計算を行った。

Fig.1 Analysis model and discretization

Table 1 に $t = 250$ [s] における $x_2 = 0.5$ [m] での解析結果と厳密解との相対誤差を示す。どの近似関数を用いた場合でも精度の良い結果が得られていることがわかる。また、他の時間でも両者がよく一致していることを確認している。

Table 1 Relative error on $x_2 = 0.5$ [m]

Approximate function	Relative error [%]
CSRBF C^2 級	0.019618155
CSRBF C^4 級	0.002712192
Thin plate spline	0.071490751
High order thin plate spline	0.004225557
Multiquadric	0.007544196
$1 + r^2 + r^3$	0.020045447
$1 + r^2 + r^3 + r^4$	0.020317743
$1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5$	0.050917634
$1 + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6$	0.044637589

参考文献

- (1) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 培風館, 1991.
- (2) P.W. Partridge, C.A. Brebbia, L.C. Wrobel: *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, 1992.
- (3) C.S. Chen, C.A. Brebbia, H. Power: *Commun. Numer. Meth. Engng.*, **15**, 1999, pp. 137-150.
- (4) 田中正隆, 松本敏郎, 須田裕輔, 高桑晋: 日本機械学会論文集中 (A 編), **68-676** (2002), pp.1702-1707.