円弧切欠き弾性ヒンジの変形特性に関する数値的検討

A Numerical Examination of Angular Deflection Feature of Flexure Hinges with Circular Cutouts

正 ○賀勢 晋司 (信州大) 畠山 拓弥 (日本精工) 水間 敬太 (TOWA)

Shinji KASEI, Shinshu University, Wakasato 4-17-1, Nagano
Takuya HATAKEYAMA, NSK Ltd.
Keita MIZUMA, TOWA Corp.

Key Words: Flexure Hinge, Angular Deflection Feature, Numerical Examination, Paros's Equation, FEM

1. 緒言

弾性ヒンジは通常、部材に円弧状切欠き (みぞ) を設けたもので、精密あるいは超精密機構における力 (モーメント) - 変位変換用の要素として、微動案内などに欠くことができない部品となっている。その設計においては、力 (モーメント) と変位の間の変位特性、すなわちばね定数を知る必要があり、パロス等の式 (J. M. Paros and L. Weisbord⁽¹⁾) がその近似式としてよく利用されている。

しかし、このパロスの式について、その導き方やヒンジ形状に伴う近似度がどのようなものであるか、必ずしも知られているとは言えない。

そのため本報では、円弧状切欠きヒンジのばね定数について材料力学的な一般的理論式を求め、上述の近似度の検討結果を報告する。なお、長方形断面部材に対する両側及び片側切欠き、円形断面部材に対する環状切欠きの形態を検討対象とし、有限要素計算結果も取り入れる。

2. ばね定数の解析

まず、両側切欠き形の場合を考え、図 1 (a) にその形状と記号を示す。切欠きによるくびれ部分だけが変形に関係するとし、曲げモーメント M によるたわみ角 α を求める。たわみ Y 、縦弾性係数 E 、断面 2 次モーメント I_D を用いれば、

$$\alpha = \frac{dY}{dx} = \int_{x_0}^0 \frac{M}{EI_D} dx \quad (1)$$

ただし、 $x_0 = R \sin \theta_m$ 、 $I_D = (2/3)b_D y^3$ である。

変数変換により、式(1)の被積分関数を $(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)$ を含む形に変え、積分を進め⁽²⁾、ばね定数 K_1 が明らかになるようにその結果を整理すると、

$$\frac{1}{K_1} = \frac{\alpha}{M} = \frac{3}{2Eb_D R^2} \left(\frac{1}{2\beta + \beta^2} \right) \left[\left\{ \frac{1+\beta}{\gamma^2} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{\gamma(2\beta + \beta^2)} \right\} \cdot \sqrt{1 - (1 + \beta - \gamma)^2} + \left\{ \frac{3(1+\beta)}{(\beta^2 + 2\beta)^{3/2}} \right\} A \right] \quad (2)$$

なお、

$$A = \tan^{-1} \frac{1 + \sin \theta_m - B \cos \theta_m}{\sqrt{1 - B^2} \cos \theta_m} - \tan^{-1} \frac{\cos \theta_m - B(1 + \sin \theta_m)}{\sqrt{1 - B^2} (1 + \sin \theta_m)}$$

Fig.1 Three kinds of hinge and dimensional symbols

ここで、パラメータとして、 $\beta = t_D/(2R)$ 、 $\gamma = h_D/(2R)$ 、 $B = 2R/(2R + t_D)$ とする。図 1 の右上に円弧状切欠きの形状と記号を示す。 R は円弧半径、 θ_m は円弧中心 O から見た円弧半角を表す。これらは片側切欠きと環状切欠きの場合にも同様に用いる。

両側切欠きの場合、パロス等の式⁽¹⁾によるばね定数 K_{1P} は、

$$\frac{1}{K_{1P}} = \frac{9\pi}{2Eb_D R^2 (2\beta)^{5/2}} = \frac{9\pi R^{1/2}}{2Eb_D t_D^{5/2}} \quad (3)$$

と表される。式(2)において、 $\beta \leq 1$ 、 $\beta \leq \gamma$ 、それに伴って $\gamma \rightarrow 1$ 、 $B \rightarrow 1$ 、 $\theta_m \rightarrow \pi/2$ とし、次のような近似的扱いを試みる。

$$\frac{1}{K_1} \approx \frac{3}{2Eb_D R^2} \cdot \frac{1}{2\beta} \left\{ \left(1 + \frac{3}{2\beta} \right) + \frac{3}{(2\beta)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{3}{2Eb_D R^2} \left\{ \frac{1}{2\beta} + \frac{3}{(2\beta)^2} + \frac{3\pi}{(2\beta)^{5/2}} \right\} \quad (4)$$

β が十分小さければ、上式右辺の中括弧内の第1及び第2項は第3項に較べてかなり小さいと思料されるので、それらを見捨てれば、式(3)が導かれる。式(3)には、以上のような取り扱い方が含まれているのではないかとと思う。

次に、図1(b)の片側切欠きの場合を同様な考え方で解き、ばね定数 K_2 を導く。その結果から、ばね定数のパロス流の近似値 K_{2P} が次のように求められる。

$$\frac{1}{K_{2P}} = \frac{36\pi}{Eb_s R^2 (2\beta)^{3/2}} = \frac{9\pi R^{1/2}}{\sqrt{2} Eb_s t_s^{3/2}} \quad (5)$$

図1(c)の環状切欠きの場合も同様にしてばね定数 K_3 を導くことができる。その結果を用いて、ばね定数についてパロス流の近似値 K_{3P} を求めると、

$$\frac{1}{K_{3P}} = \frac{20}{ER^3 (2\beta)^{3/2}} = \frac{20R^{1/2}}{Et_c^{3/2}} \quad (6)$$

3. 各種条件における数値的検討

三種の切欠き形態に対する近似値 K_{1P} 及び K_{3P} について、それぞれの相対偏差率、 $(K_{1P}-K_1)/K_1$ 及び $(K_{3P}-K_3)/K_3$ を考える。図2に $\beta \leq 0.2$ についての結果を示す。パラメータとして、円弧半角 θ_m を4通りに変えている。その内、 $\theta_m = 90^\circ$ は円弧中心 O がくびれ部分以外の部材表面の延長線上にある場合である。 K_{2P} についての相対偏差率は K_{1P} の場合にほぼ等しいと考えられる。

図2によると、近似度は全体としてかなり良好であると言える。 β が小さいほど、すなわちくびれ部分の厚さの割合が小さいほど両者間の差異は小さい。また、両者間の差異は環状切欠きの場合のほうが小さいようである。 θ_m が及ぼす影響があり、特にそれが 30° の場合、他の場合より差異がかなり大きくなっている。 β が同じでも、 θ_m が小さいのは、切欠きの x 軸方向(図1参照)幅が大きく取られる場合である。 θ_m を 60° 以上とし、 β が 0.1 程度以下であれば、数パーセント以下の差異と見られ、十分の近似度があると言えるのではないかとと思う。

次に設計例として、表1に示す条件の両側切欠き形ヒンジのモーメント M とたわみ角 α の関係を式(2)、式(3)及び有限要素法により求めて比較する。図3に有限要素モデルを示す。

Table 1 Design conditions for a hinge with both sides cutouts

Material : phosphor bronze
$E=120\text{GPa}$, $G=43\text{GPa}$, $\nu=0.33$, $h_D=4.5\text{mm}$, $b_D=8\text{mm}$, $t_D=0.5\text{mm}$, $R=2\text{mm}$, $\theta_m=90^\circ$

この場合は $\beta=0.125$ である。図2から、式(2)と式(3)による結果がほぼ合致することは予想されるが、有限要素法による結果も他とよく合っており、上述の解析は妥当であると思われる。

4. 結 言

- ・円弧状切欠きをもつ弾性ヒンジ3種のばね定数を解析し、パロス等の式の導出過程を推定した。
- ・パロス等の式の近似度を検討し、くびれ部の厚さ割合が小さいほどそれが十分に高いことを示した。
- ・有限要素解析も行つて本報の解析が妥当と思われることを述べた。

貴重な情報を教示頂いた信州大学、深田茂生教授に感謝する。

(a) Both sides cutouts

(b) Circular cutout

Fig.2 Relative differences brought by Paros's approximations

Fig.3 Appearance of a FEM model (9430 elements)

Fig.4 Graphic expressions about deflection feature obtained from 3 different methods (object: the hinge specified in Table 1)

参考文献

- (1) J.M.Paros, L.Weisbord: How to design FLEXURE HINGES, Machine Design, Nov. 25, 1965, p151.
- (2) 森口, 宇田川, 一松: 数学公式 I, 岩波, 1965, p80.