並行流熱交換器における共役グレッツ問題の解析解

An analytical solution to conjugated Graetz problems in parallel flow heat exchangers

○正 千葉良一（宮城高専） 正 泉正明（石巻専修大） 正 菅野良弘（岩手大）

Ryoichi CHIBA, Miyagi National College of Technology, Nodayama48, Medeshimasiote, Natori
Masaaki IZUMI, Ishinomaki Sensyu University, Shinmito1, Minamisakai, Ishinomaki
Yoshihiro SUGANO, Iwate University, 4-3-5, Ueda, Morioka

Key Words: Heat Transfer, Forced Convection, Heat Exchanger, Non-Newtonian Fluid, Analytical Solution

1. 緒 言

近年の都市化に伴い、産業分野のみならず民生分野においても設備機器スペースを効率的に運用することが要望されており、それらの中に組み込まれる熱交換器にも小型化が求められている。ところで小型熱交換器では、機器内部を流れる流体の流路長が比較的短く、加熱流体および受熱流体の温度場が十分発達しない場合があるため、熱貫流率を全伝熱面にわたり一定と仮定して取り扱う従来の設計法は適用できない。このように熱貫流率が空間的に変化する場合、その熱交換器の性能評価をより正確に行うには、加熱流体と受熱流体間の連成強制対流熱伝達問題、いわゆる共役Graetz問題を解く必要がある。しかし、この問題は一般に半数値的解法⁽¹⁾により解かれており、これまでに報告された解析解は、境界層理論と漸近展開法を用いた近似解⁽²⁾のみである。

そこで本研究では、流路が平行平板に挟まれた領域である並行流熱交換器に対する「流体-流体 共役Graetz問題」を、一種の積分変換法に相当するVodickaの手法⁽³⁾を用いて数学的に解き、流れ方向に変化する流体温度の解析解を陽な形式で導出する。なお、本研究ではペクレ数が十分大きい範囲を対象としているので、流れ方向への熱伝導は無視している。本手法を用いる限り平板間を流れる流体の速度分布形には解析上制限がないので、一例として、加熱流体および受熱流体はともにベキ乗則に従う非ニュートン流体であるとした。数値計算結果より、流体の熱伝導率比、流路断面積比およびペクレ数比が流体の温度分布と流体間の交換熱量に及ぼす影響を考察した。

この場合、定常時の熱平衡は式(1)で表される。

$$u_m(y) \frac{\partial T_m}{\partial x} = \alpha_m \frac{\partial^2 T_m(x, y)}{\partial y^2}, m = 1, 2 \quad (1)$$

発達した速度場における速度分布は、無次元座標: $\eta = y/b_1$, 流路断面積比: $B = b_2/b_1$ を導入すれば式(2), (3)で与えられる。

$$u_1(y) = u_{a1} \frac{2\nu_1 + 1}{\nu_1 + 1} \left(\frac{2}{1-B} \right)^{\frac{1+\nu_1}{\nu_1}} \left[\left(\frac{1-B}{2} \right)^{\frac{1+\nu_1}{\nu_1}} - \left| \frac{2\eta - B - 1}{2} \right|^{\frac{1+\nu_1}{\nu_1}} \right] \quad (2)$$

$$u_2(y) = u_{a2} \frac{2\nu_2 + 1}{\nu_2 + 1} \left(\frac{2}{B} \right)^{\frac{1+\nu_2}{\nu_2}} \left[\left(\frac{B}{2} \right)^{\frac{1+\nu_2}{\nu_2}} - \left| \eta - \frac{B}{2} \right|^{\frac{1+\nu_2}{\nu_2}} \right] \quad (3)$$

ここで、 $\nu_m (m = 1, 2)$ はベキ乗則モデルインデックスと呼ばれ、 $\nu_m < 1$ なら擬塑性流体を、 $\nu_m > 1$ ならダイラタント流体を表し、 $\nu_m = 1$ の場合はニュートン流体に相当する。

境界条件と $y = b_2$ の面での連続条件は次式のとおりである。

$$T_m(0, y) = T_{0m}(y), m = 1, 2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_2(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial T_1(x, b_1)}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, b_2)}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x, b_2)}{\partial y}, T_1(x, b_2) = T_2(x, b_2) \quad (6)$$

解析結果の一般性を考慮して、式(1), (4)~(6)を無次元表記すると、式(7)~(10)が導かれる。

$$U_m(\eta) \left[\frac{Pe(1-B)}{B} \right]^{m-1} \frac{\partial \theta_m}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \eta^2}, m = 1, 2 \quad (7)$$

$$\theta_m(0, \eta) = \theta_{0m}(\eta), m = 1, 2 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta_2(\xi, 0)}{\partial \eta} = \frac{\partial \theta_1(\xi, 1)}{\partial \eta} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta_1(\xi, B)}{\partial \eta} = \bar{\lambda} \frac{\partial \theta_2(\xi, B)}{\partial \eta}, \theta_1(\xi, B) = \theta_2(\xi, B) \quad (10)$$

ただし、無次元流速: $U_1(\eta) = u_1(\eta)/u_{a1}$, $U_2(\eta) = u_2(\eta)/u_{a2}$, ペクレ数比: $\bar{Pe} = \alpha_1 u_{a2} b_2 / [\alpha_2 u_{a1} (b_1 - b_2)]$, 熱伝導率比: $\bar{\lambda} = \lambda_2 / \lambda_1$, 無次元温度: $\theta_m = (T_m - T_s) / (T_{01b} - T_s)$, 熱拡散率: α_1, α_2 , 参照温度: T_s , 平均流速: u_{a1}, u_{a2} , 流体①の入口でのバルク温度: T_{01b} , 無次元流れ方向座標: $\xi = x\alpha_1 / (b_1^2 u_{a1})$ である。

式(7)は変数係数P.D.E.であり、厳密解を得ることは非常に困難である。そこで、各流路内を y 方向(η 方向)にそれぞれ n_1, n_2 領域に分割し、各領域で $U_m(\eta)$ を相異なる一定値 U_i^* と近似すれば、第 i 領域($i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2$)における熱平衡式が式(11)のように得られる。なお、これ以降の θ の添え字は流体番号ではなく、仮想的に分割された領域番号を意味する。

Fig.1 Physical model and coordinate system for the parallel flow heat exchanger

2. 解 析

2-1 解析モデルと定式化 解析モデルを図1に示す。平行平板間(以降、流路と記す)に、発達した速度分布 $u_1(y), u_2(y)$ をもった流体①と流体②が流入している。流路入口における流体温度はそれぞれ $T_{01}(y), T_{02}(y)$ である。 $y = 0, b_1$ の面は断熱されており、 $y = b_2$ の面を通して両流体間で熱交換が行われる。また、以下の仮定を導入する。(i)物性値は温度によらず一定。(ii)平板の熱抵抗は無視できる。(iii)流れ方向の熱伝導は無視できる。(iv)流れは常に層流である。(v)自然対流は生じない。(vi)粘性による発熱は無視する。

$$K_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta^2}, \quad (11)$$

$$\text{ただし, } K_i = \begin{cases} U_i^* \overline{Pe}(1-B)/B & 1 \leq i \leq n_2 \\ U_i^* & n_2+1 \leq i \leq n_1+n_2 \end{cases}$$

仮想界面における連続条件と境界条件は次式で表される.

$$\theta_i(\xi, \eta_i) = \theta_{i+1}(\xi, \eta_i) \quad (12)$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \frac{\partial \theta_i(\xi, \eta_i)}{\partial \eta} = \frac{\partial \theta_{i+1}(\xi, \eta_i)}{\partial \eta} \quad (13)$$

$$\theta_i(0, \eta) = \theta_{0m}(\eta), \quad 1 \leq i \leq n_2; m=2, \quad n_2+1 \leq i \leq n_1+n_2; m=1 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta_i(\xi, 0)}{\partial \eta} = \frac{\partial \theta_{(n_1+n_2)}(\xi, 1)}{\partial \eta} = 0 \quad (15)$$

2-2 Vodickaの手法による解析解の導出 式(11)~(15)の解を式(16)の形に分離する.

$$\theta_i(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^{\infty} \phi_l(\xi) X_{il}(\eta) + \theta_{av} \quad (16)$$

ただし, θ_{av} は $\xi \rightarrow \infty$ における流体の均一温度である. 固有関数 $X_{il}(\eta)$ は式(17)で与えられる.

$$X_{il}(\eta) = A_{il} \cos(\sqrt{K_i} \gamma_l \eta) + B_{il} \sin(\sqrt{K_i} \gamma_l \eta) \quad (17)$$

未知係数 A_{il} , B_{il} は式(12), (13), (15)より決定される. また, 固有値 γ_l は A_{il} , B_{il} が0以外の解を持つための条件から決定され, 式(18)で表される超越方程式の正根として求められる.

$$\mathbf{G}_{e1} \cdot \mathbf{E}_{e1} \cdot \mathbf{E}_{e2} \cdots \mathbf{E}_{e(n_1+n_2-1)} \cdot \mathbf{a}_{e(n_1+n_2)} = 0 \quad (18)$$

ここで,

$$\mathbf{G}_{e1} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{K_1} \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{ei} = \mathbf{C}_{ei}^{-1} \mathbf{D}_{e(i+1)},$$

$$\mathbf{C}_{ei} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{K_i} \gamma_i \eta_i) & \sin(\sqrt{K_i} \gamma_i \eta_i) \\ -\lambda_i / \lambda_{i+1} \sqrt{K_i} \gamma_i \sin(\sqrt{K_i} \gamma_i \eta_i) & \lambda_i / \lambda_{i+1} \sqrt{K_i} \gamma_i \cos(\sqrt{K_i} \gamma_i \eta_i) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{e(i+1)} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{K_{i+1}} \gamma_{i+1} \eta_{i+1}) & \sin(\sqrt{K_{i+1}} \gamma_{i+1} \eta_{i+1}) \\ -\sqrt{K_{i+1}} \gamma_{i+1} \sin(\sqrt{K_{i+1}} \gamma_{i+1} \eta_{i+1}) & \sqrt{K_{i+1}} \gamma_{i+1} \cos(\sqrt{K_{i+1}} \gamma_{i+1} \eta_{i+1}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_{e(n_1+n_2)} = \begin{bmatrix} 1 & \tan(\sqrt{K_{n_1+n_2}} \gamma_l) \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

式(19)中のTは転置行列記号である. 式(14)に式(16)を代入して, 次の条件式を得る.

$$G(\eta) = \sum_{l=1}^{\infty} \phi_l(0) X_{il}(\eta) = \theta_{0m}(\eta) - \theta_{av} \quad (20)$$

さて, 式(17)で与えられる固有関数 $X_{il}(\eta)$ は, 不連続な重み関数に対して式(21)の直交関係を有する.

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} K_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} X_{il}(\eta) X_{ik}(\eta) d\eta = \begin{cases} \text{const.} & (l=k) \\ 0 & (l \neq k) \end{cases} \quad (21)$$

この場合, $G(\eta)$ は $X_{il}(\eta)$ により式(22)のように級数展開できる.

$$G(\eta) = \sum_{l=1}^{\infty} g_l X_{il}(\eta) \quad (22)$$

ただし,

$$g_l = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} K_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} G(\eta) X_{il}(\eta) d\eta / \sum_{i=1}^{n_1+n_2} K_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} [X_{il}(\eta)]^2 d\eta \quad (23)$$

式(16)を式(11)に代入し, 式(17)を考慮すれば, 式(24)で表される $\phi(\xi)$ に関する1階線形常微分方程式が得られる.

$$\frac{d\phi}{d\xi} + \gamma_l^2 \phi = 0 \quad (24)$$

式(20), (22)より得られる $\phi(0) = g_l$ を用いて式(24)を解けば, $\phi(\xi)$ は式(25)で表現される.

$$\phi_l(\xi) = g_l \exp(-\gamma_l^2 \xi) \quad (25)$$

したがって, 第 l 領域における温度関数 $\theta_l(\xi, \eta)$ は次式となる.

$$\theta_l(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} g_l e^{-\gamma_l^2 \xi} [A_{il} \cos(\sqrt{K_i} \gamma_l \eta) + B_{il} \sin(\sqrt{K_i} \gamma_l \eta)] \quad (26)$$

3. 数値計算結果および考察

数値計算の一例として, 流路断面積が等しい平行平板熱交換器に, 相異なる一定温度のニュートン流体が流入している問題, 即ち $\theta_{01}(\eta)=1$, $\theta_{02}(\eta)=0$, $B=0.5$ かつ $v_1=v_2=1$ の場合を考察する. 本計算では, 各流路の η 方向への分割数として $n_1=n_2=20$ を採用した. なお, 領域分割数を20以上にすれば, 工学的に十分な計算精度が得られることを確認している⁽⁴⁾.

図2に流路断面における温度分布の流れ方向への変化を示す. 図2(a)は同一流体間での熱交換の場合であり, 図2(b)は加熱および受熱流体にそれぞれ空気と水を想定した場合である. 同一流体の場合, $\overline{Pe} > 1$ だと加熱流体側の温度変化が大きく, 反対に $\overline{Pe} < 1$ だと受熱流体側の温度変化が大きい.

図3は流体①のバルク温度の流れ方向への変化を示しており, 比較のために, 従来のように平均熱貫流率と対数平均温度差を用いて評価したものも図中に示している. 本研究では平均熱貫流率の算出にNickolayら⁽⁵⁾の式を用いた. 図より, 従来の方法では加熱流体のバルク温度が過小に評価されていることがわかる. また, 最終的な温度への収束の程度が両者間で異なっており, 収束に至る ξ の値に約0.6の開きがある.

Fig.2 Spatial evolution of the temperature fields

Fig.3 Bulk temperature of fluid① in thermal entry region of a parallel flow heat exchanger

文 献

- (1) E. Nogueira et al., *Warme-und Stoffübertragung*, **25**, (1990), 361.
- (2) P. Plaschko, *Archive of Applied Mech.*, **70**, (2000), 597.
- (3) V. Vodicka, *Mathematische Nachrichten*, **14-1**, (1955), 47.
- (4) 千葉, 泉, 菅野, 関東支部茨城講演会論文集, (2005-9), 7.
- (5) M. Nickolay et al., *Int. J. Heat Mass Trans.*, **45**, (2002), 3263.