走行ベルトの振動解析に関する一考察

Vibration Analysis of Axially Moving Belt

正 小 寺 忠 (福 井 大)

Tadashi KOTERA, University of Fukui, 3-9-1, Bunkyo, Fukui

Key Words: Moving Belt, Free Vibration, Eigenfunction

1. まえがき

走行ベルトの振動解析の歴史は古く、ダランベール形式の解やラプラス変換による厳密解はすでに得られている。しかしながら、いわゆる固有関数による級数展開の方法ではまだ、うまく解かれていない。J.A.Wickert は固有関数の直交性を用いた解法を示しているが、直交性そのものの証明に疑問がある。本報では J.A.Wickert 論文の疑問点を示すとともに、それに代わる近似解報を示し、厳密解とよく一致することを示している。

2. 運動方程式

2-1. 弦の運動 2点 AB 間を速度 v で走行する弦の運動方程式は、波動方程式に変数変換

$$\begin{cases} x = \xi + v \tau \\ t = \tau \end{cases} \quad (1)$$

を適用することによって、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2v \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} - (a^2 - v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2)$$

となる。 a は波動の伝播速度であり、境界条件は、 $\xi = 0$, L で $u = 0$ である (図1)。

式 (2) の解を

$$u = e^{\lambda \tau} \phi(\xi) \quad (3)$$

とおくことによって、

$$\lambda^2 \phi - 2v \lambda \frac{d\phi}{d\xi} - (a^2 - v^2) \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = 0 \quad (4)$$

が得られ、さらに

$$\phi(\xi) = e^{\mu \xi} \quad (5)$$

とおくことによって

$$\mu = -\frac{\lambda}{a-v}, \quad \frac{\lambda}{a+v} \quad (6)$$

$$\phi(\xi) = A e^{-\frac{\lambda}{a-v} \xi} + B e^{\frac{\lambda}{a+v} \xi} \quad (7)$$

が得られ、境界条件を適用して

$$\lambda = \pm j \frac{a^2 - v^2}{aL} n\pi \quad n=1,2,3,\dots \quad (8)$$

が得られる。ここで $\lambda = \pm j \omega_n$ とおけば、 ω_n が第 n 次

の固有振動数である。このとき、式 (4) により

$$\phi_n(\xi) = A_{1n} (e^{-j \frac{\omega_n \xi}{a-v}} - e^{-j \frac{\omega_n \xi}{a+v}}) \quad (9)_1$$

と

$$\phi_n(\xi) = A_{2n} (e^{j \frac{\omega_n \xi}{a-v}} - e^{j \frac{\omega_n \xi}{a+v}}) \quad (9)_2$$

が得られる。こうして、式 (2) の一般解はつぎのように表される。

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \{ e^{j \omega_n \tau} A_{1n} (e^{-j \frac{\omega_n \xi}{a-v}} - e^{-j \frac{\omega_n \xi}{a+v}}) + e^{-j \omega_n \tau} A_{2n} (e^{j \frac{\omega_n \xi}{a-v}} - e^{j \frac{\omega_n \xi}{a+v}}) \} \quad (10)$$

これを実関数で表現すれば

$$u = -\sum_{n=1}^{\infty} \{ (C_{1n} \cos \omega_n \tau + C_{2n} \sin \omega_n \tau) \sin \frac{n\pi \xi}{L} \sin \frac{v}{a} \frac{n\pi \xi}{L} + (C_{1n} \sin \omega_n \tau - C_{2n} \cos \omega_n \tau) \sin \frac{n\pi \xi}{L} \cos \frac{v}{a} \frac{n\pi \xi}{L} \} \quad (11)$$

となる。ここに

$$C_{1n} = 2(A_{1n} + A_{2n}), \quad C_{2n} = 2j(A_{1n} - A_{2n})$$

式 (11) の ξ の関数が直交性をもたないために、初期条件から係数 C_{1n} , C_{2n} を求めることは簡単ではない。Wickert は直交性が成り立つとしているが、これには疑問がある。

2-2. 固有関数の直交性

第 n 次の固有振動数と固有関数が得られると、式 (4) から

$$\lambda_n^2 \phi_n - 2v \lambda_n \frac{d\phi_n}{d\xi} - (a^2 - v^2) \frac{d^2 \phi_n}{d\xi^2} = 0 \quad (4)'$$

Wickert のやり方に従えば、 $\lambda_n \phi_n = \psi_n$ とおくことにより

式 (4)' は

$$\lambda_n \begin{bmatrix} (a^2 - v^2) D^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (a^2 - v^2) D^2 \\ (a^2 - v^2) D^2 & 2vD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} \quad (4)''$$

と表される。ただし、 D は微分作用素である。簡単のためにこれを

$$\lambda_n \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi}_n = \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_n \quad (12)$$

と表し、左から $\boldsymbol{\Phi}_m^T$ をかけて、弦の全長にわたって積分すれば、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の対称性により

$$\lambda_n \int_0^L \boldsymbol{\Phi}_m^T \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi}_n d\xi = \lambda_m \int_0^L \boldsymbol{\Phi}_m^T \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_n d\xi \quad (13)$$

が成り立つという。 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が対称行列ならば確かに式 (13) は成り立つが、微分作用素を含んでおり、実際に部分積分を実行すれば、式 (13) が成り立たないことが確かめられる。

従って、初期条件から係数 C_{1n} , C_{2n} を求めることは簡単ではない。

Fig.1 Schematic model of moving belt

3. 係数の求め方

固有関数に直交性がなければ、適当な直交関数系で解を級数展開しなければならない。そこで、通常の弦の固有関数を利用して、走行ベルトの固有関数を

$$\sin \frac{n\pi\xi}{L} \sin \frac{v}{a} \frac{n\pi\xi}{L} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin \frac{i\pi\xi}{L} \quad (14)$$

$$\sin \frac{n\pi\xi}{L} \cos \frac{v}{a} \frac{n\pi\xi}{L} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin \frac{i\pi\xi}{L} \quad (15)$$

初期条件を

$$u(\xi, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin \frac{i\pi\xi}{L} \quad (16)$$

$$\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \sin \frac{i\pi\xi}{L} \quad (17)$$

と表す。これらより

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} a_n + C_{2n} b_n) = -c_i \quad i=1, 2, \dots \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (C_{1n} b_n - C_{2n} a_n) = d_i \quad i=1, 2, \dots \quad (19)$$

この無限次の連立方程式を係数 C_{1n} , C_{2n} について解けば走行ベルトの自由振動の解が得られる。

4. 数値計算例

式(18)(19)を30元の連立方程式として解いて求めた係数 C_{1n} , C_{2n} の最初の10項を用いた結果を以下に示す。

4.1 例1

ベルトに固定された座標系での初期条件を、仮に

$$u(x, 0) = h \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

とおけば、静止座標系では

$$u(\xi, 0) = h \sin \frac{\pi\xi}{L},$$

$$\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \tau} = v \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v h \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi\xi}{L}$$

となる。 $v/a = 0.5$ の場合の結果を示すと図2のようになり、ラプラス変換で求めた厳密解は図3のようになり、両者は非常によく一致している。

4.2 例2

ベルトに固定された座標系での初期条件を、仮に

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x/L, & x < L/2 \\ 2(1-x/L), & L/2 < x \end{cases}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

とおけば、静止座標系では

$$u(\xi, 0) = \begin{cases} 2\xi/L, & \xi < L/2 \\ 2(1-\xi/L), & L/2 < \xi \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \tau} = \begin{cases} 2v/L, & \xi < L/2 \\ -2v/L, & L/2 < \xi \end{cases}$$

となる。 $v/a = 0.5$ の場合の結果を示すと図4のようになる。ただし、30元の連立方程式を用いると、収束性が良くないので、15元で近似し、最初の10項を用いた結果である。ラプラス変換で求めた厳密解は図5のようになり、両者はかなりよく一致している。

Fig.2 Approximate Solution of Free Vibration

Fig.3 Exact Solution of Free Vibration

Fig.4 Approximate Solution of Free Vibration

Fig.5 Exact Solution of Free Vibration

文献

1) J.A. Wickert, J. of Applied Mechanics, Vol.57, 738(1990)