格子ボルツマン法による円管内流れの数値シミュレーション

Numerical Simulation of Fluid Flow in Circular Pipe by the Lattice Boltzmann Method

○ 中西 喬也 (信州大院) 村山 寿郎 (信州大院)
正 吉野 正人 (信州大工)

Takaya NAKANISHI, Graduate School, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, Japan
Toshiro MURAYAMA, Graduate School, Shinshu University
Masato YOSHINO, Shinshu University

Key Words: Lattice Boltzmann Method (LBM), Pipe Flow, Two-Phase Flow

1. は じ め に

円管内を流れる流体は工学の分野だけでなく、医学における血管内の流れなど様々な分野で見ることができる。円管内での流体が壁面に与える影響や流体の輸送効率の観点から、このような流れ場を解析することは非常に重要である。

近年、非圧縮粘性流体の新しい計算法として、格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM)⁽¹⁾ が提案されているが、LBM では計算手法がデカルト座標を基礎とするために、円管のような曲率のある流路では境界が格子点上にないため、何らかの近似が必要になるという問題が挙げられる。既存の研究では、埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method) を用いた円柱周りの流れ解析⁽²⁾⁽³⁾において、格子点上にない境界条件が様々提案されているが、まだ完全に確立されているとは言い難い。

そこで本研究では、LBM における円管形状を表す新たな境界条件を提案した。また、二相系 LBM に本手法を組み込み、円管内のポアズイユ流中における粒子の解析を行った。

2. 計算手法および境界条件

本研究で用いる LBM および等密度の二相系 LBM は文献 (1) および (4) を参照されたい。本節では新たに提案した境界条件について述べる。また本計算では、LBM の発展形である格子運動論スキーム (Lattice Kinetic Scheme)⁽¹⁾ を用いる。格子運動論スキームでは、通常の数値計算法と同様に巨視的な変数を用いた境界条件を適用できる。本研究では、アルゴリズムを複雑にせず、以下の近似方法を用いて、曲率をもつ境界に対し流速および圧力の補間を行った。本手法は、デカルト座標で表される立方格子で分割された計算領域内に円管を配置し、その内部領域を計算対象とする。まず Fig. 1 に示すように、円管を表す真の境界 (太線) 近傍において、周囲の格子点に少なくとも一つ境界の外側の点を含む格子点を境界点 (●) とし、その内側の格子点 (○) と区別する。このように識別された境界点において、円管の真の壁面ですべりなし壁となるように流速 u および圧力 p を近似により与える。すなわち、Fig. 2 に示すように境界点 B での流速 u_B は以下の式から二次曲線によって補間し求めた。

$$u_B = \frac{[R^2 - (R - \delta r_1)^2]}{R^2 - (R - \delta r_1 - \delta r_2)^2} u_a, \quad (1)$$

ここで、 u_a は点 a における流速であり、両隣の 2 点 a1, a2 における既知の流速を用いて内挿によって求める。なお、点 a は点 B を通る法線と a1, a2 と結ぶ線分の交点であり、 δr_1 は点 W から点 B までの長さ、 δr_2 は点 B から点 a までの長さをそれぞれ表す。

次に、圧力は壁上の点 W において法線方向の圧力勾配 $\partial p / \partial n = 0$ になるように、境界点 B における圧力 p_B を求める。はじめに、点 W の圧力 p_W を二次精度の差分近似を用いて以下の式から求める。

$$p_W = \frac{4p_a - p_c}{3}, \quad (2)$$

Fig. 1 Boundary Points. Fig. 2 Interpolation in velocity.

Fig. 3 Interpolation in pressure.

ここで、 p_a は点 a における圧力であり、流速 u_a と同様の方法で求める。同様に、 p_b は同法線と 2 点 b1, b2 を結ぶ線分との交点 b における圧力であり、 δr_3 は点 W から点 a までの長さである。さらに、同法線上に点 a より長さ δr_3 の位置にある点 c とする。また、点 c における圧力 p_c は、Fig. 3(a) に示す 2 点 a, b における既知の圧力値より一次精度の外挿によって求める。次に、Fig. 3(b) に示すように、(2) 式から求めた p_W と点 d における圧力 p_d を用いて上記と同様に二次精度の差分近似を用いて、境界上の圧力勾配が 0 になるように以下の式から境界点 B での圧力 p_B を求める。

$$p_B = \frac{3p_W + p_d}{4}, \quad (3)$$

ここで、点 d は点 W から点 B までの長さ δr_4 と点 B からの長さが等しくなる法線上の点であり、圧力 p_d は p_a , p_b より外挿によって求める。以上の方法により、境界点における流速および圧力を与え、円管状の境界をもつ流路内の流れ解析を行った。

3. 計算結果および考察

3.1 円管内のポアズイユ流れ はじめに、本手法の妥当性を評価するために、Fig. 4 に示すような $L_x = 10\Delta x$, 半径 R の円管状の領域におけるポアズイユ流の解析を行った。入口と出口は圧力差 Δp をともなう周期境界条件とし、管壁はすべりなし壁条件とした。レイノルズ数は $Re = u_{\max} R / \nu$

Fig. 4 Computational domain.

Fig. 5 Velocity profiles: ●, present result; ×, linear interpolation; —, exact solution.

Fig. 6 Error norms.

と定義した。ここで、 $u_{\max}$ は定常状態での最大流速であり、 ν は動粘性係数である。

計算結果の一例として、 $R = 40\Delta x$ 、 $Re = 1.44$ における、 $x = 0.5L_x$ 、 $z = 0.5L_z$ の y 方向の速度分布を Fig. 5 に示す。図には比較のために、同様の条件における境界点において流速および密度の線形補間を行った結果および厳密解を示す。図より、厳密解と本結果がよく一致していることがわかる。また、このときの誤差ノルムは、本手法では $Er = 0.008\%$ 、線形補間では $Er = 0.07\%$ となった。ここで、 $Er = \sum_y \sum_z |u^* - u| / \sum_y \sum_z |u^*|$ とした。この結果より、本手法は線形補間に比べて 10 倍程度精度が良いことがわかった。さらに、格子点数を変化させ厳密解との誤差ノルムを比較した結果を Fig. 6 に示す。図より、本手法の収束速度が 1.92 であった。

3.2 円管内のポアズイユ流中における単一粒子の挙動
次に、提案した境界条件と二相系 LBM を用いて、Fig. 7 に示すような円管内に球形粒子を一つ配置し、その後、圧力差によって駆動される流れ場における粒子の挙動を計算した。以下では、二相系 LBM における一相を界面張力を大きくすることによって球形粒子（固相）と見なすことにする。計算条件は、 $L_x = 120\Delta x$ 、 $L_y = L_z = 70\Delta x$ の三次元領域において、 $y - z$ 平面の中心に直径 $D = 80\Delta x$ 、主流方向の長さが $L_x = 120\Delta x$ の円筒を配置し、内部に直径 d の粒子を配置した。また、入口と出口は圧力差 Δp をともなう周期境界条件、管壁はすべりなし境界条件とし、圧力差を与え始めた時刻を $t = 0$ とした。計算におけるパラメータは、固相および周囲の流体の粘性係数をそれぞれ $\nu_p = 5.0 \times 10^{-3}\Delta x$ 、 $\nu_c = 5.0 \times 10^{-3}\Delta x$ とし、界面の厚さ、界面張力に関する定数をそれぞれ $\kappa_f = 0.01(\Delta x)^2$ 、 $\kappa_g = 0.02(\Delta x)^2$ で一定とした。また、レイノルズ数は $Re = u_{\max}D/\nu_c$ 、無次元時間 $t^* = tu_{\max}/d$ と定義した。ここで、 $u_{\max}$ は粒子が存在しないときの定常状態における最大流速である。

計算結果の一例として $Re = 92$ において、 $d = 20\Delta x$ の球形粒子が初期位置 $(x/L_x, y/D, z/D) = (0.500, -0.167, 0)$ より流動する様子を Fig. 8 に示す。また、粒子の中心位置の時

Fig. 7 Computational domain.

Fig. 8 Time evolution of particle position: side view (left); view from the outlet (right) ($t^* = tu_{\max}/d$).

Fig. 9 Time variation of center of particle: ●, y -position; ×, z -position.

間変化を Fig. 9 に示す。両図より、粒子が管壁と中心軸の間にある平衡位置に達する様子が確認できた。本結果は、流体と等密度の剛体球が示す Segré-Silberberg 効果⁽⁵⁾と同様の現象であると考えられる。

4. お わ り に

既存の LBM においてアルゴリズムの簡単さを維持し、円管形状をもつ流路に対する新たな境界条件を提案した。円管内のポアズイユ流れの計算を行い厳密解と比較した結果、良い一致が得られた。また、二相系 LBM に本手法を組み込み、円管内のポアズイユ流中における粒子の挙動のシミュレーションを行った。

文 献

- (1) 稲室隆二, 物性研究 **77** (2001), pp. 197-232.
- (2) Y. Peng, C. Shu, Y.T. Chew, X.D. Niu, X.Y. Lu, J. Comput. Phys. **218** (2006), pp. 460-478.
- (3) C. Shu, N. Liu, Y.T. Chew, J. Comput. Phys. **226** (2007), pp. 1607-1622.
- (4) T. Inamuro, R. Tomita, F. Ogino, Int. J. Mod. Phys. **17** (2003), pp. 21-26.
- (5) G. Segré, A. Silberberg, Nature **189** (1961), pp. 181-193.