振動解析における部分構造法の検討 ～高振動成分を近似した場合～

The substructuring method with the second order approximation of high frequency contents

○高橋 佑樹 (金沢工業大学大学院) 原 昂輝 (金沢工業大学大学院)
久保村 健二 (金沢工業大学)

Yuuki Takahashi, Kanazawa institute of technology, 7-1 Oogigaoka Nonoichimachi Ishikawagun Ishikawa
Takaki Hara, Kanazawa institute of technology
Kenji Kubomura, Kanazawa institute of technology

Key Words: Substructuring

1. 緒言

構造物の振動解析において低周波は構造物の強度に絡む力に関係している。例えばスペースシャトル打ち上げの際、振動解析では 55Hz までの低周波数を用いている。要するに、スペースシャトル打ち上げ時に生じる力によるシャトルの破壊を防ぐ強度計算では、低周波に注目した低周波動的応答計算が扱われている。

この動的応答計算においては、自由度減少による計算効率の向上、かつ動的外力の振動成分に対して的確に応じる部分構造法(Substructuring)が存在する。

本発表では、部分構造法による自由度減少の際、目的とする全構造物の低振動成分に比較し、大きく異なる高振動数のモード座標について低次近似、および高次近似を行い、その算出結果における数値的精度と計算効率の比較、検討を行う。

2. 理論

2-1 低次近似

まず、部分構造法を用いた自由度を減少させる理論において低次近似から行う。

変位ベクトル $\vec{u}(t)$ を固有ベクトル $\vec{\phi}$ と展開係数 $\alpha(t)$ で展開する。変位ベクトル $\ddot{\vec{u}}(t)$ を導出する。このとき、 $(i=1, n)$ とする。

$$\ddot{\vec{u}}(t) = \sum_{i=1}^n \ddot{\vec{\phi}}_i \alpha_i(t) \quad \vec{u}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \alpha_i(t) \quad \dots (1)$$

式(1)を振動方程式に代入し、両辺の左側から $\vec{\phi}_j^T(t)$ をかけると式(2)が導出される。

$$\vec{\phi}_j^T [M] \sum_{i=1}^n \ddot{\vec{\phi}}_i \alpha_i(t) + \vec{\phi}_j^T [K] \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i \alpha_i(t) = \vec{\phi}_j^T \cdot \vec{f}(t) \\ \ddot{\alpha}_j(t) + \omega_j^2 \cdot \alpha_j(t) = \vec{\phi}_j^T \cdot \vec{f}(t) \quad \dots (2)$$

結合した構造物が振動数 ω で振動しているときに、構造物 I, II に分けた一方に注目すると、もう一方の構造物から伝わる力の振動数は ω とみなすことができる。よって以下のようにおける。

$$\alpha_j(t) = A \sin \omega t \text{ より, } \ddot{\alpha}_j(t) = -\omega^2 \cdot \alpha_j(t) \quad \dots (3)$$

式(2)に式(3)を代入すると、式(4)が得られる

$$\alpha_j = \frac{1}{\omega_j^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2} \vec{\phi}_j^T \cdot \vec{f} \quad \dots (4)$$

ここで振動数 ω が、注目した構造物の固有振動数 ω_j よりはるかに小さい場合を考え、 α_j について近似する。

$\omega \ll \omega_j$ より、

$$\alpha_j(t) \doteq \frac{1}{\omega_j^2} \vec{\phi}_j^T \cdot \vec{f} \quad \dots (5)$$

式(5)の場合、右辺は限りなく 0 に等しいので、

$$\alpha_j(t) \doteq 0$$

ω と比較して、はるかに高い固有振動モードに対応するモード座標 $\vec{\alpha}_H$ は 0 で近似し、 ω と比較してほぼ同等、またはそれよりも低い固有振動モードに対応するモード座標 $\vec{\alpha}_L$ は、近似しない。すなわち式(6)のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \vec{\alpha}_L \\ \vec{\alpha}_H \end{Bmatrix} \doteq \begin{Bmatrix} \vec{\alpha}_L \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots (6)$$

ここで、式(1)を低振動数部分と高振動数部分に分ける。 $\vec{\phi}$ の低振動数成分 L(lower)と高振動数成分 H(higher)で分けたとき、行に注目すると結合部分 B(boundary)とその他の部分 I(internal)で分けることができ、 $[\Phi]$ 行列で表わす。それを用いて $\vec{u}$ を表すと式(8)になる。

$$[\Phi] = [\vec{\phi}_{j1} \ \vec{\phi}_{j2} \ \dots \ \vec{\phi}_{jL} \ \vec{\phi}_{j(L+1)} \ \dots \ \vec{\phi}_{jn}] = \begin{bmatrix} [\Phi_L] & [\Phi_H] \end{bmatrix} \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} \vec{\phi}_{B1} & \vec{\phi}_{B2} & \dots & \vec{\phi}_{Bm} \\ \vec{\phi}_{I1} & \vec{\phi}_{I2} & \dots & \vec{\phi}_{In} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_B] \\ [\Phi_I] \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = [\Phi] \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} [\Phi_{BL}] & [\Phi_{BH}] \\ [\Phi_{IL}] & [\Phi_{IH}] \end{bmatrix} \vec{\alpha} \quad \dots (8)$$

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} \vec{u}_B \\ \vec{u}_I \end{Bmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} \vec{\alpha}_L \\ \vec{\alpha}_H \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \vec{u}_B \\ \vec{u}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_{BL}] & [\Phi_{BH}] \\ [\Phi_{IL}] & [\Phi_{IH}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\alpha}_L \\ \vec{\alpha}_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\Phi_{BL}] \vec{\alpha}_L + [\Phi_{BH}] \vec{\alpha}_H \\ [\Phi_{IL}] \vec{\alpha}_L + [\Phi_{IH}] \vec{\alpha}_H \end{Bmatrix}$$

ここで、式(6)を代入する。 $\vec{u}_B$ は構造物 I, II における変位なので近似しない。

$$\begin{Bmatrix} \vec{u}_B \\ \vec{u}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_{BL}] & [\Phi_{BH}] \\ [\Phi_{IL}] & [\Phi_{IH}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\alpha}_L \\ \vec{\alpha}_H \end{Bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} [\Phi_{BL}] & [\Phi_{BH}] \\ [\Phi_{IL}] & [\Phi_{IH}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\alpha}_L \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} [\Phi_{BL}] & [\Phi_{BH}] \\ [\Phi_{IL}] & [\Phi_{IH}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\alpha}_L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\Phi_{BL}] \vec{\alpha}_L + [\Phi_{BH}] 0 \\ [\Phi_{IL}] \vec{\alpha}_L + [\Phi_{IH}] 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\Phi_{BL}] \vec{\alpha}_L \\ [\Phi_{IL}] \vec{\alpha}_L \end{Bmatrix}$$

$[\Phi_{BL}] \vec{\alpha}_L$ は結合部分の変位 $\vec{u}_B$ で表し、変形する。

$$\vec{u}' = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\Phi_{IL}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{u}_B \\ \vec{\alpha}_L \end{Bmatrix} \quad \vec{u}'^{rd} = \begin{Bmatrix} \vec{u}_B \\ \vec{\alpha}_L \end{Bmatrix} \quad \dots (9)$$

式(9)より、 $\vec{\alpha}_H$ を 0 で近似すると、高振動数時の変位 $\vec{u}_I$ を無視できる $\vec{u}'$ および $\vec{u}'^{rd}$ とすることができる。

式(9)を用いて $[K]^I$ の数を少なくする. 減少後の $[K]^I$ を $[K]^{rd}$ とし, 導出する.

$$\bar{u}^I [K]^I \bar{u}^I = \begin{Bmatrix} u_B^I \\ \alpha_L^I \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\Phi^I]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_{BB}^I] & [K_{BI}^I] \\ [K_{IB}^I] & [K_{II}^I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\Phi^I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^I \\ \alpha_L^I \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}^{Ird} [K]^{rd} \bar{u}^{Ird} = \begin{Bmatrix} u_B^I \\ \alpha_L^I \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [K_{BB}^I] & [K_{BL}^I] \\ [K_{LB}^I] & [K_{LL}^I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^I \\ \alpha_L^I \end{Bmatrix}$$

同様に, $[K]^{IIrd}, [M]^{Ird}, [M]^{IIrd}$ を導出する.

再び, 構造物 I, II を接合すると式(10)のように $[K]^{rd}$, $[M]^{rd}$ を導出することができる.

$$u^{rdT} [K]^{rd} u^{rd} = \begin{Bmatrix} u_B^{(I+II)} \\ \alpha_L^I \\ \alpha_L^{II} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [K_{BB}^I] & [K_{BB}^{II}] & [K_{BI}^I] & [K_{BL}^{II}] \\ [K_{LB}^I] & [K_{LB}^{II}] & [K_{LI}^I] & [0] \\ [K_{IB}^I] & [K_{IB}^{II}] & [0] & [K_{II}^{II}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^{(I+II)} \\ \alpha_L^I \\ \alpha_L^{II} \end{Bmatrix} \quad \dots (10)$$

2-1 高次近似

また式(4)において, マクローリン展開を行う. 2 次近似までの式を式(11)に示す.

$$\alpha_j \doteq \frac{1}{\omega_j^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_j} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_j} \right)^4 \right\} \bar{\phi}_j^T \cdot \bar{f} \quad \dots (11)$$

式(11)より 1 次近似による $[K]^{rd}$ を導出する.

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_B \\ \bar{u}_I \end{Bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\bar{\phi}_L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{IH}^T \cdot \bar{\phi}_{HB}^T}{\omega_j^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_B \\ \bar{f} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}^I [K]^I \bar{u}^I = \begin{Bmatrix} \bar{u}_B \\ \bar{\alpha}_L \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\bar{\phi}_L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{IH}^T \cdot \bar{\phi}_{HB}^T}{\omega_j^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_{BB}^I] & [K_{BI}^I] \\ [K_{IB}^I] & [K_{II}^I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\bar{\phi}_L] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_B \\ \bar{f} \end{Bmatrix}$$

同様に, $[K]^{IIrd}, [M]^{Ird}, [M]^{IIrd}$ を導出する.

以上を用いて, 構造物 I, II を結合し, 自由度を減少させた構造物全体の剛性マトリックス $[K]^{rd}$ と質量マトリックス $[M]^{rd}$ を導出する.

3. 対象とした構造物

Fig.1 のプラットトラス構造を対象構造物として分割した構造物を I, II とする. 構造物の両端を拘束点とし, 分割した境界部を I, II において同一と考え Boundary とする. その他部材緒言は Table.1 のようにする.

Table.1 Summary of elements

断面積 A	1 m ²		I	II
ヤング率 E	1 GPa	節点数	16	20
密度 density	1 kg/m ³	部材数	29	37
垂直材・水平材 長さ L	1.00 m	固有値保持数	7	6
斜材 長さ L	1.41 m

Fig.1 Substructure I, II

4. 算出結果

対象構造物の固有値及び振動数の値を Table.2 に示す. また, ここまで述べた理論を用いてモード座標を 1 次近似させ計算した固有値及び振動数の値を Table.3, 2 次近似させ計算した固有値及び振動数の値を Table.4 に示す.

Table.2 Not approximation

No.	eigenvalue	frequency[Hz]
1	8.43E-04	8.43E-04
2	2.55E-03	2.93E-03
3	5.98E-03	5.98E-03
4	1.29E-02	1.29E-02
5	1.53E-02	1.56E-02
6	2.88E-02	2.88E-02
7	3.93E-02	4.55E-02
8	4.92E-02	5.31E-02
9	5.75E-02	5.75E-02
10	9.10E-02	1.12E-01
11	1.12E-01	1.26E-01
12	1.49E-01	3.35E-01
13	1.96E-01	4.40E-01
14	2.13E-01	7.37E-01
15	2.51E-01	3.57E+00
16	3.37E-01	5.28E+00
17	4.46E-01	4.16E+01
18	4.90E-01	8.39E-01
19	5.93E-01	1.20E+00
20	6.32E-01	1.37E+00
21	7.58E-01	1.83E+00
22	8.02E-01	5.25E+00
23	8.41E-01	8.33E+00
24	9.83E-01	8.69E+00
25	1.08E+00	4.94E+01
26	1.16E+00	1.71E-01
27	1.30E+00	1.82E-01
28	1.39E+00	1.87E-01
29	1.56E+00	1.99E-01
30	1.69E+00	2.07E-01
31	1.89E+00	2.19E-01
32	2.05E+00	2.28E-01
33	2.66E+00	2.60E-01
34	2.92E+00	2.72E-01
35	3.57E+00	3.01E-01

Table.3 α_L

No.	eigenvalue	frequency[Hz]
1	8.43E-04	4.62E-03
2	2.93E-03	8.61E-03
3	5.98E-03	1.23E-02
4	1.29E-02	1.81E-02
5	1.56E-02	1.99E-02
6	2.88E-02	2.70E-02
7	4.55E-02	3.40E-02
8	5.31E-02	3.67E-02
9	5.75E-01	3.82E-02
10	1.12E-01	5.31E-02
11	1.26E-01	5.65E-02
12	3.35E-01	9.22E-02
13	4.40E-01	1.06E-01
14	7.37E-01	1.37E-01
15	3.57E+00	3.01E-01
16	5.28E+00	3.66E-01
17	4.16E+01	1.03E+00

Table.4 $\alpha_L + f$

No.	eigenvalue	frequency[Hz]
1	8.43E-04	4.62E-03
2	2.68E-03	8.24E-03
3	5.98E-03	1.23E-02
4	1.29E-02	1.81E-02
5	1.54E-02	1.97E-02
6	2.88E-02	2.70E-02
7	4.16E-02	3.25E-02
8	4.98E-02	3.55E-02
9	5.75E-02	3.82E-02
10	6.25E-02	3.98E-02
11	9.24E-02	4.84E-02
12	1.12E-01	5.31E-02
13	1.82E-01	6.80E-02
14	2.43E-01	7.84E-02
15	3.51E-01	9.43E-02
16	6.54E-01	1.29E-01
17	7.10E-01	1.34E-01
18	8.39E-01	1.46E-01
19	1.20E+00	1.75E-01
20	1.37E+00	1.86E-01
21	1.83E+00	2.15E-01
22	5.25E+00	3.65E-01
23	8.33E+00	4.59E-01
24	8.69E+00	4.69E-01
25	4.94E+01	1.12E+00

5. 考察

近似なしと低次近似を比較したときでは, Table.2 及び Table.3 の No.1 から No.10 の低周波数範囲の固有値と振動数を読み取る. 比較すると数値に差がないことがわかるが, 数値が大きくなるにつれて値に大きく差が生じる. 高次近似では Table.4 より, 低次近似と比較したとき, 近似なしの固有値と振動数に近づいたことがわかる. このことから高次近似の方が, より高精度の値を得ることができることが分かる.

6. 結言

目的とする全構造物の低振動成分に比較し, 大きく異なる高振動数のモード座標に対して低次近似, 及び高次近似を行い, 自由度を減少させる方法を確認できた. より高次近似をさせていくことで, 多少の自由度増加だけで求める結果の数値的精度の向上が可能となる.

参考文献

Kubomura, K. "A Theory of Substructure Modal Synthesis," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.49(1982), pp.903-909.