弾性壁間の狭いすき間内における粘性流体の自由表面の挙動
The motion of free surface of viscous fluid in narrow gap between elastic walls

○ 宗高 大和 (長岡技科大)

正 古口 日出男 (長岡技科大)

Yamato MUNETAKA, Nagaoka University of Technology, 1603-1 Kamitomioka, Nagaoka, Niigata

Hideo KOGUCHI, Nagaoka University of Technology, 1603-1 Kamitomioka, Nagaoka, Niigata

Key Words: Meniscus Instability, Elastic Sheet, Newtonian Fluid, Squeeze Flow

1. 緒言

2枚の平行な板の狭いすき間に粘性流体を満たし、上側の板を一定速度で引き離すと、負圧によって空気がすき間に入り込み、流体の残留液膜が板面上に複雑な樹枝状パターンを形成する場合がある。これはメニスカス不安定現象と呼ばれ、接着テープの剥離面やすべり軸受内の破断油膜、非晶質材料の引張破断面などにおいても観察される。

既往の研究では、流体を挟む平板は圧力による変形が無視できる剛体板とみなされていた。しかし、濡れた路面とゴムタイヤの接触や動物の関節内部など、より一般的には流体を挟む物体の変形を考慮する必要があると思われる。そこで、本研究では流体を挟む平板に弾性シートを貼り付け、圧力による弾性変形を考慮した場合のメニスカス不安定現象を調べる。特に、本報では自由表面上の摂動の成長条件を解析的に導出し、実験結果と比較する。

2. 理論解析

2・1 圧力の基本解

Fig.1 Schematic image of the analysis model

図1に解析モデルを示す。粘度 μ の非圧縮性ニュートン流体が長さ L 、幅 B の平板のすき間 h （初期すき間 h_0 ）に挟まれている。平板の上下には弾性定数と厚さがそれぞれ E_u, E_l, d_u, d_l の弾性シートが接着されている。座標原点を液膜の左端に取り、板の長さ方向を x 軸、幅（奥行き）方向の y 軸、厚さ方向を z 軸とする。

まず、圧力の基本解を求める。引き離し速度を V_s 、圧力を p 、表面張力を σ とする。基礎式は次の Reynolds 方程式である。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + A^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12Ca^\circ \quad (1)$$

ただし、 $A = L/B$ であり、各変数は以下のように無次元化される。

$$x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{B}, z = \frac{z^*}{h_0}, t = \frac{V_s t^*}{h_0}, h = \frac{h^*}{h_0}, p = \frac{p^*}{\sigma/L} \quad (2)$$

また、式(1)右辺の無次元数は修正キャピラリ数であり、次式で表される。

$$Ca^\circ = \frac{\mu V_s}{\sigma} \left(\frac{L}{h_0} \right)^3 \quad (3)$$

いま、 $A \rightarrow 0$ として y 方向に圧力が変化しないものとする。このときの圧力 p_0 をとおり、境界条件

$$\left. \frac{dp_0}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad p(x_s) = -\frac{2\beta}{h_B} \quad (4)$$

の下で解くと、圧力の基本解が次のように求まる。

$$p_0(x) = \frac{1}{\alpha} \left[\{24\alpha Ca^\circ (x^2 - x_s^2) + h_B^4\}^{\frac{1}{4}} + H \right] \quad (5)$$

ここで、 x_s は自由表面までの平均距離、 $\beta = L/h_0$ 、 $H = 1 + t$ であり、

$$h_B = \frac{H + \sqrt{H^2 - 8\alpha\beta}}{2}, \quad \alpha = \frac{\sigma}{h_0 L} \left(\frac{d_u}{E_u} + \frac{d_l}{E_l} \right) \quad (6)$$

である。

2・2 摂動解析

次に摂動の成長条件を求める。自由表面上の y 方向に微小な摂動 ε が生じたとき、自由表面の位置が次のように表されたとする。

$$X(x_s, y, t) = x_s(t) + \varepsilon e^{\omega t} \cos(ky/A) \quad (7)$$

これに応じて圧力も次のように変化したとする。

$$p(x, y, t) = p_0(x) + \varepsilon G(x) e^{\omega t} \cos(ky/A) \quad (8)$$

ここで、 ω は摂動の成長速度、 k は摂動の波数である。摂動項 $G(x)$ は式(8)を式(1)に代入して得られる次の微分方程式から求められる。

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \frac{3}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dG}{dx} - k^2 G = 0 \quad (9)$$

式(9)は求積法では解けないので、摂動展開による1次近似解を求める。式(9)の解が $G \approx G_0 + \alpha G_1$ と表されるとし、これを代入すると、

$$\begin{aligned} G_0'' - k^2 G_0 &= 0 \\ G_1'' - k^2 G_1 &= -q(x) G_0' \\ q(x) &= \frac{24\alpha Ca^\circ (x^2 - x_s^2) + h_B^4}{36Ca^\circ x} \end{aligned} \quad (10)$$

これらを解くと、

$$\begin{aligned} G_0 &= C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} \\ G_1 &= C_3 e^{kx} + C_4 e^{-kx} + g_1 \\ g_1 &= -\frac{e^{kx}}{2k} \int e^{-kx} q(x) G_0' dx \\ &\quad + \frac{e^{-kx}}{2k} \int e^{kx} q(x) G_0' dx \end{aligned} \quad (11)$$

C_1 から C_4 までの未定係数は次の境界条件から求める。

$$G(x_s) = k^2 - \left. \frac{dp_0}{dx} \right|_{x=x_s}, \quad \left. \frac{dG}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

次に ω に関する関係式を導く。式(7)を時間で微分すると界面の移動速度が求まる。また、式(13)で与えられる平均流速の式に界面の位置を代入しても界面の速度が求まる。

$$\bar{v}_x = -\frac{h^2}{12Ca^\circ} \left(\frac{dp_0}{dx} + \frac{dG}{dx} \varepsilon e^{\omega t} \cos(ky/A) \right) \quad (13)$$

これらの式を比較し、 ε の1次の項をまとめると、次式が得られる。

$$\omega = -\frac{1}{12Ca^\circ} \left(\frac{24Ca^\circ x_s}{h_B^2} \frac{dp_0}{dx} + h_B^2 \frac{dG}{dx} \right) \Big|_{x=x_s} \quad (14)$$

摂動が成長するためには ω が正でなければならない。したがって、次式が摂動の成長条件である。

$$\frac{dG}{dx} \Big|_{x=x_s} < -\frac{(24Ca^\circ x_s)^2 \alpha}{2h_B^7} \quad (15)$$

また、摂動が成長するときには、摂動の成長速度 ω が最大になる場合が観察されると思われる。そこで、式(14)を波数で微分して0とおくと、次式を得る。

$$\frac{d}{dk} \left(\frac{dG}{dx} \Big|_{x=x_s} \right) = 0 \quad (16)$$

弾性変形を考慮しない場合、式(15)および式(16)に対応する関係式は次の通りである。

$$Ca^\circ > \frac{H^3}{12x_s} k^2 \quad (17)$$

$$Ca^\circ = \frac{H^3}{12x_s} k^2 \left(\frac{3}{x_s} - \frac{4k}{2kx_s + \sinh(2kx_s)} \right) \quad (18)$$

簡単のために、ここでは、時間がほとんど経過しておらず、自由表面がほとんど移動していない場合、すなわち、 $t = 0$ 、 $x_s = 0.5$ の場合を考える。理論的な摂動波長は式(15)および式(16)を波数あるいは波長に関する非線形方程式として数値的に解くことで求められる。

3. 実験

3・1 実験方法

実験は以下のように行った。 $L=30$ mm, $B=100$ mm, $E=0.83$ MPa, $d=3$ mm の弾性シート（ハイパーゲル 3030T, (株)エクシールコーポレーション）を2枚、平行に対向させた上下の基板に接着し、その間に粘度 $\mu=9.75$ Pa s, 表面張力係数 $\sigma=21.3$ mN/mのシリコンオイル（KF-96 1万 cSt, (株)信越シリコン）を入れる。その後、引張試験機を用いて上側の板を一定速度で引き離し、このときの自由表面の移動を下側に設置したミラーを通してビデオカメラで撮影する。そして、得られた画像から摂動成長の初期段階における波長を測定する。表1に実験条件を示す。実験は各条件で3回ずつ行い、その平均波長を求めた。また、同じ寸法のアクリル板に対しても同一の実験条件で実験を行った。

3・2 実験結果

図2に各初期すき間に対する修正キャピラリ数と摂動波長の関係を示す。赤色のマーカーは弾性シート、青色のマーカーはアクリル板の各条件における実験結果を示している。青色の点線と赤色の白抜き○はそれぞれ平板と弾性シートにおける摂動の成長速度を最大にする波数の条件（式(16)および式(18)）、青色の一点鎖線と赤色の白抜き□はそれぞれ摂動の成長条件（式(15)および式(17)）である。

図2より、実験で観測される摂動の波長はすべて式(15)および式(18)の成長条件を満たす不安定領域にあることがわかる。また、キャピラリ数が小さいときには最大成長速度の条件に近い波長が観測されることがわかる。しかし、キャピラリ数が大きくなるにつれて、観測される波長は各初期すき間に応じた一定値に近づく傾向にある。これは残留液膜の影響であると考えられる。理論解析ではすき間方向の流速分布や残留液膜などを考慮していないため、このような傾向は見られない。

弾性シートと平板の波長の理論値にはほとんど差がない。これは今回の実験条件では変形の度合いを示すパラメータ α が 10^{-6} 程度であり、弾性変形による効果がほとんど現れ

なかったためである。今後は弾性シートの支持方法を変えるなど変形量が大きくなるような実験を行い、また、残留液膜やすき間方向の流れを考慮した解析を行う必要があると思われる。

4. 結言

弾性シートを有する平行平板間のメニスカス不安定現象について、線形安定性理論に基づき、修正キャピラリ数と摂動波長の関係式を導出した。また、弾性シートと平板の両方について同一の条件で波長計測実験を行い、それぞれを比較・検討した。

参考文献

- (1)古口, 岡田, 機論 (B 編), **53**-491 (1987), 2062.
- (2)古口, 田村, 矢田, 機論 (B 編), **54**-505 (1988), 2446.

Table.1 Experiment condition

h_0 , mm	0.3, 0.5, 0.75, 1.0
V_S , mm/min	0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100

Fig.2 Relationship between modified capillary number and wave length