406 有限変形理論に基づく円板の有限要素解析

Finite Element Analysis of Circular Plate Based on Finite Deformation Theory

正 石田 良平(大阪府立大学)

Ryohei ISHIDA, Osaka Prefecture University, 1-1, Gakuen-cho, Sakai, 599-8531

In the deformation analysis of the circular plate subjected to pressure, the fundamental differential equation system is derived by applying a finite deformation theory. We formulate the finite element formulation from the fundamental equation by applying the weighted residual method. By numerical calculation, the differences between the plate solution based on the linear theory and the present solution are shown. Furthermore, it is also shown that the present solution approaches the membrane solution along with the incrementation of pressure.

Key Words: Finite Element Method, Finite Deformation Theory, Circular Plate.

1.はじめに

微小変形理論に基づく平板理論は面内変形が無視できるという仮定に基づいており、結果的に平板に生ずる面内力が極めて小さいものとして曲げモーメントと内圧の関係から重ポアソン方程式を導いている。一方、膜理論では、膜材料が曲げモーメントを負担できないことから、面内力と内圧の関係を定式化している。前者は圧力とたわみは比例関係にあり、後者はたわみの三乗が圧力に比例する。

平板理論と膜理論との中間の解としては、Way, S.の解¹⁾とSheplak, M. and Dugundji, J.の解²⁾がある。両者とも非線形連立微分方程式が得られている。前者はフーリエ級数を用いて解いており、後者は差分法を用いて解いている。しかし、これらの定式化の段階で若干の誤解がある。

本研究では、平板の大たわみ理論に基づいて円板面に圧力負荷を受ける円板の理論を整理し、有限要素

法による定式化を行い、具体的に数値計算により、平板理論と膜理論の中間の解を求める。

2.解析

2.1 基礎微分方程式の導出 いま、図1に示すような半径 a の円板が内圧 p_0 を受けている。今考えている問題は軸対称問題であり、 u_z は r のみの関数であるから、

$$u_r = u(r) - z \frac{dw}{dr}, \quad u_z = w(r). \quad (1)$$

とおくことができる。ここで、 w は円板のたわみである。このとき、グリーンのひずみテンソルは、ラグランジュ表現によると、

$$E_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$E_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right)^2 + \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (3)$$

で与えられるから、式(1)を式(2)、(3)に代入して整理すると、

$$E_{rr} = \frac{du}{dr} - z \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad E_{\theta\theta} = \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr}. \quad (4), (5)$$

となる。

グリーンのひずみテンソルに対応して、キルヒホッフ応力テンソル σ_{ij} は、

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (E_{rr} + \nu E_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu E_{rr} + E_{\theta\theta}). \quad (6), (7)$$

で与えられる。面内力と曲げモーメントは板の厚さを h と

Fig.1 Plate Subjected to Pressure p_0

して、

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} dz, \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} dz \quad (8), (9)$$

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} z dz, \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} z dz \quad (10), (11)$$

キルヒホッフ応力に対するつりあい方程式は本問題の場合、

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + R = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{r} \sigma_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} + \sigma_{rr} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \sigma_{rz} + \sigma_{zz} \right) + Z = 0 \quad (13)$$

式(12)から、

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) = 0, \quad \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) - Q_r = 0 \quad (14)$$

ここで、 $Q_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz$ である。

式(13)から、

$$N_r \frac{dw}{dr} + Q_r + \frac{r}{2}(q+p) = 0 \quad (15)$$

ここで、 $q = \int_{-h/2}^{h/2} Z dz$, $p = \sigma_{zz}|_{z=h/2} - \sigma_{zz}|_{z=-h/2}$ である。 q は円板

の自重による項、 p は内外圧力差に関連する項である。

さらに、式(15)は式(14)の第二式の関係を用いて Q_r を曲げモーメントで表し式(10)、(11)を用いると

$$D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) - N_r \frac{dw}{dr} = \frac{r}{2}(q+p) \quad (16)$$

が得られる。ここで、 D は板の曲げ剛性である。

また、式(14)の第一式といくつかの関係式を用いて N_θ を消去すると、

$$r^2 \frac{d^2 N_r}{dr^2} + 3r \frac{dN_r}{dr} + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0 \quad (17)$$

が得られる。

式(16)と(17)はたわみ w と面内力 N_r を未知量とした連立非線形微分方程式になっている。

2.2 有限要素法定式化 有限要素法の定式化を行うにあたり、式(16)と(17)を次のように書き直す。

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Theta}{d\xi} \right) - \Theta \xi - 12(1-\nu^2) \xi S_r \Theta = 6(1-\nu) P \xi^2 \quad (18)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^3 \frac{dS_r}{d\xi} \right) + \frac{1}{2} \xi \Theta^2 = 0 \quad (19)$$

ここで、導入した無次元量は以下の通りである。

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad U = \frac{u}{h}, \quad \Theta = \frac{dW}{d\xi} = \frac{a}{h} \frac{dw}{dr}, \\ S_r = \frac{N_r a^2}{Eh^3}, \quad P = \frac{(p_o - \gamma h) a^4}{Eh^4}.$$

ただし、 γ は材料の単位体積当たりの重量である。

有限要素法の定式化は通常の重み付き残差法によって行った。紙面の都合上詳細は省略する。

3. 数値解析

前章で行った定式化ならびに重み付き残差法による有限要素法定式化に基づいて具体的に数値計算を行った。図2および3に計算結果を示す。

図2で、横軸は無次元座標 ξ 、縦軸は計算された諸量である。計算条件は、 $P=2.0$ および $\nu=0.3$ である。 P の値が小さいので、線形解との差は大きくない。

図3で、横軸は無次元化された圧力 P 、縦軸は中央たわみ ($W(r=0)$) である。破線で表される線形解は式(18)で $S_r=0$ とおいたときの解である。この図から、 P が小さいときは線形解に一致し、 P の増大に伴って線形解から離れていき、膜理論解に近づいていくことがわかる。

参考文献 省略

Fig.2 Variation of $\Theta, W, W(\text{linear})$ and S_r

Fig.3 Variation of W vs P