313 円形介在物を有する帯板の曲げ (介在物の接着条件の違いによる界面応力の検討)

The stress field in an elastic strip with a circular hole
or a circular inclusion under bending

○ 正 堀 辺 忠 志 (茨 城 大 学), 福 村 昌 宏 (サンエンジー)

Tadashi HORIBE, Ibaraki University, 4-12-1, Nakanarusawa-cho, Hitachi-shi, Ibaraki 316-8511
Masahiro FUKUMURA, San-enji Co. Ltd. (Former Graduate Student of Ibaraki University)

This paper presents an analytical solution for an infinite strip having a symmetrically-located circular hole or a circular inclusion, where the strip is subjected to a bending moment at infinity. On the inclusion problem, two types of inclusions, i.e., perfect bonding and pure sliding are analyzed. The analysis is based on the Papkovitch-Neuber stress function approach and the solution is obtained through a combination of harmonic functions of integral forms and infinite series. The boundary conditions at the interface of the strip and the inclusion are satisfied using the relations between the polar and Cartesian harmonics. The numerical results obtained from the proposed methods are illustrated the various stiffness ratios and sizes of the inclusion. The validity of the present solution is verified by comparing the theoretical results of Howland or Udoguchi.

Key Words : Two Dimensional Elasticity, Strip, Inclusion, Stress Function, Stress Concentration, Bending

1. 結 論

これまで、多くの研究者により孔または介在物を有する弾性体の応力集中問題が明らかにされてきた。しかし、これらの多くの解析法は、Airy の応力関数に基づいて応力計算を行っている。介在物問題を解析する場合、界面の変位の計算が必要となってくるが、Airy の応力関数に基づいて解析する場合には、この変位の計算のために応力関数の積分を行う必要がある。しかしながら、応力関数が複雑な場合には、この積分計算が非常に煩雑となる。他方、介在物問題の多くは介在物と母材が完全密着であることを前提として解析されているが、界面のすべりの影響も見逃せない。そこで本研究では、1 個の円形介在物を有する帯板の曲げに伴う応力集中現象を Papkovitch-Neuber 型の変位調和関数（この調和応力関数を求めると、変位と応力が同時に求められる）を用いて解析し、介在物と母材の接着条件が応力集中にどのような影響をもたらすのかを検討する。

2. 円形介在物を有する帯板の曲げ

図 1 に示すように、幅が 2 の帯板の中央に半径 a の介在物があり、この帯板が無遠慮で曲げモーメント M を受ける場合を考える。この帯板を平面弾性問題として扱うものとしたときの、曲げを与える Papkovitch-Neuber の調和応力関数は、

$$[I] \begin{cases} \varphi_0 = -\frac{\kappa-1}{24}kr^3 \cos 3\theta \\ \varphi_1 = -\frac{k}{4}r^2 \cos 2\theta \end{cases} \quad (1)$$

で与えられる。これより導かれる変位、及び応力成分は、

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{1}{8}kr^2\{(\kappa-2)\cos\theta - \cos 3\theta\} \\ 2Gv_\theta &= \frac{1}{8}kr^2\{(\kappa+2)\sin\theta + \sin 3\theta\} \end{aligned} \quad (2)$$

Fig 1: A strip with an inclusion under bending

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{4}kr(\cos\theta - \cos 3\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{4}kr(3\cos\theta + \cos 3\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{4}kr(\sin\theta + \sin 3\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで、 G は横弾性係数、 $k = 3M/2$ である。界面における境界条件は、完全密着を仮定すると

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, & (v_\theta)_{r=a} &= (\bar{v}_\theta)_{r=a} \\ (\sigma_r)_{r=a} &= (\bar{\sigma}_r)_{r=a}, & (\tau_{r\theta})_{r=a} &= (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} \end{aligned} \quad (4)$$

である。ここで、 $-$ のついた変位、応力は介在物側に関するものとする。

一方、 θ 方向のすべりを許す場合には、 $(v_\theta)_{r=a} \neq (\bar{v}_\theta)_{r=a}$ となる。ゆえに、境界面ですべりを許す場合には、以下の境界条件式となる。

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, & (\sigma_r)_{r=a} &= (\bar{\sigma}_r)_{r=a} \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a}, & (\tau_{r\theta})_{r=a} &= 0 \text{ or } (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

そこで、式 (4) または (5) と同時に以下のような境界条件を満足する解を導いて、応力関数 [I] に重ね合わせれ

ば、弾性介在物を有する帯板が無限遠方で曲げモーメント M を受ける場合の解が得られる。

(i) 帯板側面 で

$$(\sigma_x)_{x=\pm 1} = (\tau_{xy})_{x=\pm 1} = 0 \quad (6)$$

(ii) 無限遠方ですべての変位及び応力が消失する。

介在物を有する帯板に関する調和応力関数として、帯板および介在物の領域で正則な調和関数を考え、以下のような関数を与える。

$$[II] \begin{cases} \varphi_0 = k \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\cos(2m+1)\theta}{r^{2m+1}} \\ \varphi_1 = k \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\cos 2m\theta}{r^{2m}} \end{cases} \quad (r > a) \quad (7)$$

$$[III] \begin{cases} \varphi_0 = k \int_0^{\infty} \psi_1(\lambda) \sinh \lambda x \cos \lambda y d\lambda \\ \varphi_1 = k \int_0^{\infty} \lambda \psi_2(\lambda) \cosh \lambda x \cos \lambda y d\lambda \end{cases} \quad (8)$$

$$[IV] \begin{cases} \varphi_0 = k \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n r^{2n+1} \cos(2n+1)\theta \\ \varphi_1 = k \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n r^{2n} \cos 2n\theta \end{cases} \quad (r < a) \quad (9)$$

ここで、 $A_m, B_m, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ 及び $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ は、それぞれ境界条件より決定される未定係数及び未知関数である。

次に、調和関数の座標変換公式を用いて応力関数 [I], [II], [IV], [VI] より応力成分を求め、介在物面の境界条件を満足させると、変位の連続条件のみを示せば

$$\begin{aligned} & \left[(u_{A1})_{n=0} A_0 + (u_{B2})_{n=0} B_1 + (u_{\beta 2})_{n=0} \beta_1 \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\Gamma} \left\{ (\bar{u}_{A1})_{n=0} \bar{A}_0 + (\bar{u}_{B2})_{n=0} \bar{B}_1 \right\} \right] \cos \theta \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(u_{A1})_n A_n + (u_{B2})_n B_{n+1} + (u_{B1})_n B_n \right. \\ & \quad \left. + (u_{\alpha 1})_n \alpha_n + (u_{\beta 2})_n \beta_{n+1} + (u_{\beta 1})_n \beta_n \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\Gamma} \left\{ (\bar{u}_{A1})_n \bar{A}_n + (\bar{u}_{B2})_n \bar{B}_{n+1} + (\bar{u}_{B1})_n \bar{B}_n \right\} \right] \\ & \cos(2n+1)\theta = -\frac{1}{8} a^2 \{ (\kappa - 2) \cos \theta - \cos 3\theta \} \end{aligned} \quad (10)$$

Fig 2: σ_θ around the interface (Perfect bonding)

となる。ここに、 u_{A1} などは紙面の都合上省略。これらの境界条件式から未定係数 A_n などを決定して解を定めることができる。

3. 数値解析

図 2 は、完全密着を仮定したときの界面での母材側応力 σ_θ である。介在物の大きさを $a = 0.2, 0.6$ 、弾性定数比 $\Gamma = \bar{G}/G$ を $0 \sim \infty$ と変化させた。図 3 は、すべりを許した場合の σ_θ の分布である。図 4 は、 $a = 0.6, \Gamma = \infty$ としたときのミーゼス応力のコンターマップである。

Fig 3: σ_θ around the interface (Sliding interface)

Fig 4: Contour map (von Mises stress, $a = 0.6, \Gamma = \infty$)

4. 結 論

円孔の場合と比較すると、介在物が存在した場合には母材側の応力集中は大きく緩和される。その効果は、母材と介在物の横弾性係数比が大きいほど、また介在物半径が大きいほど著しい。

謝辞：本研究に当たっては埼玉大学 土田栄一郎教授から多くのご教示をいただきました。記して謝意を表します。

参考文献

- (1) M.Lee, I. Jasiuk, and E. Tsuchida, The Sliding Circular Inclusion in an Elastic Half-Plane, Trans. A.S.M.E., J. of Appl. Mech., Vol.59(1992), pp.57-64.
- (2) E. Tsuchida, Y. Arai, and T. Hashimoto, Stresses in a Semi-Infinite Plate Containing an Elliptic Inhomogeneity Normal to the Straight Edge under Uniaxial Tension, Theoretical and Appl. Mech., Vol.50(2001), pp.145-156.
- (3) 中原ほか, 弾性学ハンドブック, 朝倉書店 (2001).