709 偏心円形介在物を有する帯板の引張り

Stresses in an Elastic Strip Having an Eccentric Circular Inclusion Subjected to Tension

正 堀辺 忠志 (茨城大学), 草野 宣幸 (日立製作所)

Tadashi HORIBE, Ibaraki University, 4-12-1, Nakanarusawa-cho, Hitachi-shi, Ibaraki 316-8511
Nobuyuki KUSANO, HITACHI, 1-6-1, Marunouchi, Chiyoda-ku, Tokyo 100-8220

In this paper, an analytical solution for an infinite strip having an eccentrically located circular inclusion is given when the strip is subjected to tension at infinity. The solution is based on an approach involving Papcovich-Neuber displacement potentials and deduced using the simple forms of Cartesian and cylindrical harmonics. The boundary conditions on both sides of the strip and around the inclusion are completely satisfied with the aid of the relations between the Cartesian and cylindrical harmonics. The solution is shown in graphs and the effect of the eccentricity on the stress distribution is clarified.

Key Words : Stress, Strip, Elasticity, Eccentric Inclusion, Tension, Stress Concentration, Numerical analysis, Structural analysis

1. 緒 論

材料中の欠陥は、応力集中を発生させ、降伏やき裂を引き起こす場合がある。このため、欠陥周辺の応力を明らかにすることは非常に重要であり、現在まで、多くの研究者が応力集中問題に取り組んでいる。弾性体が非対称な形状であるとき、すなわち、欠陥が偏心した位置にあるときなどは応力集中係数は増加する傾向にある。したがって、十分な強度を維持するためには、偏心した欠陥が引き起こす応力集中現象を明らかにする必要がある。このような問題は、偏心が解析をより複雑にするために、研究例はそれほど多くない。こうした非対称問題は、強度設計をする上で実用的にも重要な問題であり、今後多くの解析が待ち望まれている。

そこで本研究では、一個の偏心円形介在物を有する帯板に、引張り荷重を与えた際の応力集中現象を Papcovich-Neuber 型の調和変位関数を用いて解析する手法を提案する。介在物問題に関しては、境界面において完全密着の場合およびすべりを含む場合について考察し、それぞれの理論解を導出した。その後、得られた理論解に基づいて数値計算を行い、偏心介在物近傍の応力分布ならびに、介在物半径、偏心量および弾性定数比の影響などを明らかにした。

2. 偏心円形介在物を有する帯板の引張り

図1に示すように、介在物の偏心量を b 、帯板の幅を 2 として、帯板の半分の幅 ($=1$) を全ての長さの基準として測るものとする。したがって介在物中心 O 点より帯板側面までの距離は $1-b$ および $-1-b$ となる。また、 O 点を座標原点として直角座標 (x, y) と極座標 (r, θ) を使用し、帯板側面は $x = 1-b, x = -1-b$ 、介在物面は $r = a$ で表される。この板を平面弾性問題として扱うものとしたときの、引張りを与える Papcovich-Neuber の調和応力関数は、

$$[I] \begin{cases} \varphi_0 = \frac{(\kappa+1)p_0}{8}(y^2 - x^2) = -\frac{(\kappa+1)p_0}{8}r^2 \cos 2\theta \\ \varphi_1 = -\frac{p_0}{2}x = -\frac{p_0}{2}r \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

で与えられる。これより導かれる変位および応力成分は、 $r = a$ の位置で、

図 1: Coordinate system

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{a}{2}p_0 \left(\frac{\kappa-1}{2} - \cos 2\theta \right), \\ 2Gv_\theta &= \frac{a}{2}p_0 \sin 2\theta, \quad \sigma_r = \frac{p_0}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{p_0}{2} \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = \frac{p_0}{2}(1 + \cos 2\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで、 G は母材の横弾性係数である。

偏心円形介在物を有する無限長帯板が無限遠方で y 軸方向に p_0 の引張り荷重を受ける場合の解を得るには、以下のような境界条件を満足する解を導けばよい。

(i) 帯板側面 $x = \pm 1$ で

$$(\sigma_x)_{x=\pm 1} = (\tau_{xy})_{x=\pm 1} = 0 \quad (3)$$

(ii) 介在物面 $r = a$ で

(a) 完全密着介在物の場合

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, (v_\theta)_{r=a} = (\bar{v}_\theta)_{r=a} \\ (\sigma_r)_{r=a} &= (\bar{\sigma}_r)_{r=a}, (\tau_{r\theta})_{r=a} = (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} \end{aligned} \quad (4)$$

(b) すべり介在物の場合

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, (\sigma_r)_{r=a} = (\bar{\sigma}_r)_{r=a}, \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(iii) 無限遠方 $r = \infty$ で

$$\sigma_y = p_0, \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (6)$$

ここで、介在物の変位および応力などを $\bar{u}_r, \bar{v}_\theta, \bar{\sigma}_r, \dots$ などと表わし、介在物に関する物理量には、添字 $-$ を付すこととする。

次に、母材側領域が円形介在物を除く無限板領域と帯板領域の共通部分から構成されていること、および介在物領域が円形領域であることに注目する。

母材側 ($r > a$)、介在物側 ($r < a$) に対し、極座標で表された調和関数と直角座標で表された調和関数とを用いて次のような変位関数を用いる。

$$[II] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \left(-A_0 \log r + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos m\theta}{r^m} \right) \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{\cos(m+1)\theta}{r^{m+1}} \end{cases} \quad (r > a) \quad (7)$$

$$[III] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \int_0^\infty \left[\psi_1(\lambda) \cosh \lambda(x+b) + \psi_2(\lambda) \sinh \lambda(x+b) \right] \cos \lambda y d\lambda \\ \varphi_1 = p_0 \int_0^\infty \lambda \left[\psi_3(\lambda) \cosh \lambda(x+b) + \psi_4(\lambda) \sinh \lambda(x+b) \right] \cos \lambda y d\lambda \end{cases} \quad (r > a) \quad (8)$$

$$[IV] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n r^n \cos n\theta \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n r^{n+1} \cos(n+1)\theta \end{cases} \quad (r < a) \quad (9)$$

ここで、 $A_m, B_m, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ 及び $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \psi_3(\lambda), \psi_4(\lambda)$ は、それぞれ境界条件より決定される未定係数及び未知関数である。特に帯板幅に比して介在物半径が小さい場合は、[III] の変位関数は不要となる。また、変位関数 [II] [III] より導かれる変位及び応力は無限遠方ですべて消失する。

次に、調和関数の座標変換公式を用いて応力関数 [I], [II], [III], [IV] より応力成分を求め、介在物面の境界条件を満足させると未定係数 $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ を決定して解を定めることができる。

3. 数値解析例

ポアソン比を $\nu = 0.3$ とし、横弾性係数比 $\Gamma = \bar{G}/G = 0.5, 2.0$ および介在物半径 $a = 0.1 \sim 0.9$ の場合について数値計算を行なった。したがって、 $\Gamma \rightarrow 0$ は偏心円孔の場合を表わす。また、本研究では平面応力問題として考え、 κ や $\bar{\kappa}$ などは、 $\kappa = \bar{\kappa} = (3-\nu)/(1+\nu)$ とした。

すべての無限級数の収束は良好であるが、介在物半径 a が大きくなるにつれて次第に収束が悪くなる。そこで、境界条件の精度が、0.1 % 以下になるように、 $n = 20$ として連立一次方程式を解いた。

図2は、境界面に沿った円周方向応力 σ_θ と角度 θ との関係性を求めた図である。母材側応力 σ_θ は、 Γ の値が大きくなると応力の最大値が低下しているのがわかる。反対に、

$\bar{\sigma}_\theta$ は増加していることがわかる。 $\bar{\sigma}_\theta$ は、増加しても Γ の値が小さいときの σ_θ の最大値よりも低い値をとっている。で、 Γ の増加が応力集中を緩和しているといえる。

図3は、境界面ですべりを有する場合の σ_θ と $\bar{\sigma}_\theta$ の分布を示した図である。完全密着条件下での結果と比べると、 $\bar{\sigma}_\theta$ の曲線の形が変わっていることがわかる。また、 σ_θ がとる値の範囲が大きくなっていることもわかる。

図2: Variations of stresses σ_θ and $\bar{\sigma}_\theta$ around the inclusion ($b = 0.2$, Perfect bonding)

図3: Variations of stresses σ_θ and $\bar{\sigma}_\theta$ around the inclusion ($b = 0.2$, Sliding interface)

4. 結 論

介在物周りの応力に及ぼす、介在物半径、横弾性係数および偏心量の影響などを詳しく調べ、以下の結論を得た。

(1) 介在物の母材に対する剛性比 Γ は、応力の分布および大きさに大きく影響を及ぼす。

(2) 介在物問題での最大応力は $r = a, \theta = 0$ で生じ、介在物が母材より柔らかい場合 ($\Gamma < 1$) には界面の母材側に、介在物が母材より硬い場合 ($\Gamma > 1$) には界面の介在物側に生ずる。

(3) 介在物を挿入することで応力集中は著しく緩和される。 Γ かつ介在物半径 a が大きいほどその効果は著しい。また、その緩和の効果は、完全密着介在物の場合がすべり介在物の場合に比べて大きい。

参考文献

- (1) 堀辺ほか、円形介在物を有する帯板の引張り、機論、A 編、72-719(2006), pp.24-31.
- (2) 堀辺ほか、偏心円孔を有する帯板の引張り (調和変位関数に基づく解析)、機論、A 編、72-723(2006), pp.185-192.