Numerical Calculation on Liquid-Metal Magnetohydrodynamic Flow in Inlet Region of Rectangular Channel

○学 平野 宏 (姫工大) 正 熊丸 博滋 (姫工大)

Hiroshi HIRANO, Himeji Institute of Technology, Shosha 2167, Himeji-shi, Hyogo

Hiroshige KUMAMARU, Himeji Institute of Technology

Numerical calculations on liquid-metal magnetohydrodynamic (MHD) flow in a rectangular channel have been performed for the inlet region of the applied magnetic field and for the cases of small aspect ratios, i.e. small length ratios of the channel side perpendicular to the magnetic field and the side parallel to the field. One-direction momentum equation and two-directions Maxwell induction equations have been solved numerically by the finite difference method. Calculation results have shown that the MHD pressure drop increases along the flow direction, takes the maximum value in the inlet region and thereafter decreases to a value for a fully-developed region.

Key Words : Magnetohydrodynamics, MHD, Aspect Ratio, Finite Difference Method

1. 緒言

核融合炉ブランケットの冷却方法の一つとして、液体金属を用いるものがある。この場合、炉心プラズマ閉じ込め用の強磁場の存在によって、MHD (Magnetohydrodynamic; 電磁流体力学的) 圧力損失が増大するため、ポンプ動力が著しく大きくなる。従来、液体金属MHD流れについては、アスペクト比 (管路断面の磁場に垂直な辺と平行な辺の比) が1より十分に大きい場合について、数値計算が行われてきた。

本研究では、核融合炉で重要となるアスペクト比が小さい矩形管路内を、上流から層流状態の液体金属が強磁場に流入する場合のMHD流れについて数値計算を行い、MHD圧力損失を求める。

Fig.1 Calculation model

2. 数値計算

図1に示すような、X軸に垂直な壁 (幅2a, 厚さ t_{wb} , 電気伝導率 σ_{wb}) およびY軸に垂直な壁 (2b, t_{wa} , σ_{wa}) で囲まれた矩形管内をZ軸+方向に流れる液体金属流れを考える。外部印可磁場 B_0 の方向はY軸+方向であり、この外部印可磁場は $Z>0$ の領域でのみ存在し $Z=0$ より $Z=Z_0$ まで増加し、 $Z>Z_0$ で一定の値をとる。流れは磁場のない上流では十分に発達した層流状態であり、壁は流路に比べて薄いとする。対称性を考慮して $X>0$, $Y>0$ の領域のみを対象として数値計算を行う。

速度場 V についての運動方程式、連続の式および誘導磁場 B についての誘導方程式を連立させて解く。このとき、運動方程式にはLorentz力 (電磁力) の項を加えている。速度成分についてはX方向およびZ方向成分を考慮し、誘導磁場についてはY方向およびZ方向成分を考慮する。運動方程式は主流方向のZ方向のみで表し、誘導方程式はY方向およびZ方向で表すと次のようになる。

$$\eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \right) + \frac{1}{\mu} B_0 \left(\frac{\partial B_z}{\partial Y} - \frac{\partial B_y}{\partial Z} \right) - \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial X} + w \frac{\partial w}{\partial Z} \right) = - \left(- \frac{\partial p}{\partial Z} \right) \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial Z} \quad (2)$$

$$0 = -B_0 \frac{\partial w}{\partial Z} - w \frac{\partial B_0}{\partial Z} + \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial Z^2} \right) \quad (3)$$

$$0 = B_0 \frac{\partial w}{\partial Y} + \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

ここで、 p , ρ , η , σ , μ はそれぞれ圧力、流体の密度、粘度、電気伝導率、透磁率である。

また、境界条件は以下のようになる。

$$X=0: u(X)=u(-X), w(X)=w(-X) \quad (5.a,b)$$

$$X=b: u=w=0 \quad (6)$$

$$Y=0: u(Y)=u(-Y), w(Y)=w(-Y) \quad (7.a,b)$$

$$Y=a: u=w=0 \quad (8)$$

$$X=0: B_y(X)=B_y(-X), B_z(X)=B_z(-X) \quad (9.a,b)$$

$$X=b: B_y = -\frac{\sigma_{wb} t_{wb}}{\sigma} \frac{\partial B_y}{\partial X}, B_z = -\frac{\sigma_{wa} t_{wa}}{\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial X} \quad (10.a,b)$$

$$Y=0: B_z(Y)=-B_z(-Y) \quad (11)$$

$$Y=a: B_z = -\frac{\sigma_{wb} t_{wb}}{\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial Y} \quad (12)$$

$$Z=0: B_0=0, B_y(Z)=-B_y(-Z) \quad (13)$$

$$Z=Z_0: B_y=0 \quad (14)$$

ここで、式(5.a,b), (7.a,b), (9.a,b)は偶関数、式(11)は奇関数であることを示す。また、式(10.a,b), (12)は薄い壁についてShercliffにより提案された境界条件に基づく。

また、Z方向の平均流速は次式により定まる。

$$\bar{w} = \iint_{0 \leq X \leq b, 0 \leq Y \leq a} \frac{w}{ab} dXdY \quad (15)$$

無次元数 $x=X/a$, $y=Y/a$, $z=Z/a$, $z_0=Z_0/a$, $u^*=u/\bar{w}$,
 $w^*=w/\bar{w}$, $B^*=B_z/(\bar{w}\mu\sqrt{\sigma\eta})$, $B_y^*=B_y/(\bar{w}\mu\sqrt{\sigma\eta})$,
 Poiseuille 数 $P=(-\partial p/\partial z)(a^2/\eta\bar{w})$, アスペクト比 $\beta=b/a$,
 Hartmann 数 $Ha=B_0a\sqrt{\sigma/\eta}$, 電気伝導率比 $\phi_a=\sigma_{wa}t_{wa}/\sigma a$,
 $\phi_b=\sigma_{wb}t_{wb}/\sigma a$ を導入して無次元化すると, 各式は以下のよ
 うになる.

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - \text{Re} \left(u^* \frac{\partial w^*}{\partial x} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) + Ha \left(\frac{\partial B^*}{\partial y} - \frac{\partial B_y^*}{\partial z} \right) = -P \quad (16)$$

$$0 = \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 B_y^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y^*}{\partial y^2} - Ha \frac{\partial w^*}{\partial y} - w^* \frac{\partial Ha}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 B^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B^*}{\partial y^2} + Ha \frac{\partial w^*}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

$$x=0: u^*(x)=u^*(-x), w^*(x)=w^*(-x) \quad (20.a,b)$$

$$x=\beta: u^*=w^*=0 \quad (21)$$

$$y=0: u^*(y)=u^*(-y), w^*(y)=w^*(-y) \quad (22.a,b)$$

$$y=1: u^*=w^*=0 \quad (23)$$

$$x=0: B_y^*(x)=B_y^*(-x), B^*(x)=B^*(-x) \quad (24.a,b)$$

$$x=\beta: B_y^*=-\phi_a \frac{\partial B^*}{\partial x}, B^*=-\phi_a \frac{\partial B^*}{\partial x} \quad (25.a,b)$$

$$y=0: B^*(y)=B^*(-y) \quad (26)$$

$$y=1: B^*=-\phi_b \frac{\partial B}{\partial y} \quad (27)$$

$$z=0: B_0=0, B_y^*(Z)=-B_y^*(-Z) \quad (28)$$

$$z=z_0: B_y^*=0 \quad (29)$$

$$1 = \int_0^\beta \int_0^1 \frac{w^*}{\beta} dx dy \quad (30)$$

$x=0 \sim \beta$, $y=0 \sim 1$, $z=0 \sim z_0$ をそれぞれ 20, 20, 100 分割
 u , w , B_y^* , B^* を未知数として, 式 (16) ~ (19) を式 (20) ~
 (29) をもとに差分法により解く. 各 z において式 (30) を満た
 すまで式 (16) の P を変化させて計算を繰り返す.

3. 計算結果

実験を模擬したケースとして, $\beta=0.409$, $Ha=285$,
 $\phi_a=\phi_b=0.178$, $Re=2000$, $z_0=5$ における¹⁾, 入口から発達する
 までの P の変化を図 2 に示す. $Ha=0$ の状態で流入し, $0 \leq z \leq$
 5 で Ha 数が直線的に増加する場合, P は $z=5$ まで増加し最大
 値をとる. その後 P は減少し発達した流れの一定値に漸近
 することがわかる.

管中心の流速の z 方向変化を図 3, 4 に示す. 下流に進む
 にしたがって, w^* は x 軸に垂直な壁近傍では著しく増加する
 M 型分布に変化していく. 一方, y 方向にはほぼ平坦な分布
 を示すように変化していく.

管中心の x 方向の誘導電流 $j_x = \partial B^* / \partial y$ の z 方向変化を図 5,
 6 に示す. 下流に進むに従って, j_x の絶対値は増大している.
 この結果, z 軸 - 方向に Lorentz 力が大きく働き, P が増大し
 ていく. j_x は x 方向の壁付近で低下するため, w^* は壁付近で
 増大する. また, j_x は y 方向にはほぼ一定であるため w^* は
 平坦になる.

4. 結言

磁場助走区間について矩形管路内の電磁流体流れについ
 ての数値計算を行った. 助走区間内で圧力損失が最大値を
 とり, その後発達した流れの一定の圧力損失値に漸近して
 いくことが明らかになった.

文献 1) 中森他, 機講論 (関西支部), 講演 No.605 (2000-3).

Fig.2 Poiseuille Number (P) along Flow-Axis (z)

Fig.3 Velocity Distribution along x-axis

Fig.4 Velocity Distribution along y-axis

Fig.5 Current Distribution along x-axis

Fig.6 Current Distribution along y-axis