クロスプライ積層円筒パネルの非定常熱弾性問題の近似解 (円周方向に非一様加熱を受ける場合)

Approximate Solution for Transient Thermoelastic Problem
of a Cross-Ply Laminated Cylindrical Panel
(Case of Nonuniform Heat Supply in the Circumferential Direction)

○ 正 大多尾義弘 (大阪府大) 正 谷川 義信 (大阪府大)

Yoshihiro OOTAO, Osaka Prefecture University, Gakuen-cho 1-1, Sakai, 599-8531 JAPAN

Yoshinobu TANIGAWA, Osaka Prefecture University

This paper is concerned with the theoretical treatment of transient thermal stress problem involving a cross-ply laminated cylindrical panel consisting of an orthogonal pile of layers having orthotropic material properties due to nonuniform heat supply in the circumferential direction. We obtain the approximate solution for the two-dimensional temperature change in a transient state, and thermal stresses of a simple supported cylindrical panel under the state of plane strain. As an example, numerical calculations are carried out for a 3-layered cross-ply cylindrical panel, and the numerical results obtained by approximate solution and exact solution are compared.

Key words: Thermoelasticity, Composite Material, Cross-Ply, Cylindrical Panel,
Plane Strain Problem, Transient State, Approximate Solution

1. 緒 言

異方性積層複合材料の破壊形態の一つに層間はく離が挙げられ、このような現象を評価するためには、面外方向のせん断応力や厚さ方向の垂直応力を考慮した解析が必要である。さらに、加熱条件によっては定常状態に至るまでの過渡的な状態において熱応力が最大となるため、非定常熱応力解析が重要となる。ところで、曲率を有する円筒パネルの熱弾性問題の解析は、積層板の解析に比べて、理論的な取り扱いが困難であるため、その報告例はほとんど見られない。そこで最近、著者らは、直交異方性を有するプライが直交積層されたクロスプライ積層円筒パネルが単純支持され、かつ表面より円周方向に非一様に加熱される場合の非定常熱弾性問題を平面ひずみ問題として厳密に解析した。しかし、熱応力の解析において、ベッセル関数で表される温度解を半径方向座標のべき乗で評価する必要があり、その数値計算において取り扱いが煩雑となる。そこで、本報では、比較的厚さが薄い場合に対する近似解を導出し、厳密解との比較により、その有効性を検討する。

2. 解 析

図1のように、 θ 方向に θ_0 の角度を持ち、 z 方向に無限の長さを有する N 層からなる内半径 a 、外半径 b のクロスプライ積層円筒パネルを考える。各層はそれぞれ独立した直交異方性を持ち、各層における繊維方向は z 方向または θ 方向に配向していると仮定する。

2.1 温度解析 加熱条件として、円筒パネルの初期温度が零度であり、時刻 $t=0$ の瞬間より内表面および外表面が、それぞれ、 θ 方向に非一様で z 方向には一様な温度関数 $T_a f_a(\theta)$ 、 $T_b f_b(\theta)$ で表される加熱媒体により、 h_a 、 h_b の相対熱伝達率により加熱される場合を考える。一方、側面($\theta=0, \theta_0$)は零度に保たれていると仮定する。この場合温度分布は $r-\theta$ 平面内の二次元分布となる。まず、次式に示す局所座標 $\bar{y}_i$ を導入する。

$$\rho = \bar{H}_i + \bar{y}_i \quad (1)$$

ここで、厚さは比較的薄い場合を考え、

$$\bar{H}_i + \bar{y}_i = \bar{H}_i, \quad \partial \rho = \partial \bar{y}_i \quad (2)$$

と評価すれば、各層における非定常熱伝導方程式の基礎式の無次元表示は、以下のように表示される。

$$\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \tau} = \bar{\kappa}_n \left(\frac{\partial^2 \bar{T}_i}{\partial \bar{y}_i^2} + \frac{1}{\bar{H}_i} \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{y}_i} \right) + \frac{\bar{\kappa}_a}{\bar{H}_i^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_i}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

この時、初期条件式、温度境界条件式の無次元表示は、以下のように表示される。

$$\tau=0; \quad \bar{T}_i=0 \quad ; i=1 \sim N \quad (4)$$

$$\bar{y}_i = -\frac{\bar{H}_i}{2}; \quad \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{y}_i} - H_a \bar{T}_i = -H_a \bar{T}_a f_a(\theta) \quad (5)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\bar{H}_i}{2}, \bar{y}_{i+1} = -\frac{\bar{H}_{i+1}}{2}; \quad \bar{T}_i = \bar{T}_{i+1}; \quad i=1 \sim (N-1) \quad (6)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\bar{H}_i}{2}, \bar{y}_{i+1} = -\frac{\bar{H}_{i+1}}{2}; \quad \bar{\lambda}_n \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{y}_i} = \bar{\lambda}_{r,i+1} \frac{\partial \bar{T}_{i+1}}{\partial \bar{y}_{i+1}} \quad (7)$$

$$\bar{y}_N = \frac{\bar{H}_N}{2}; \quad \frac{\partial \bar{T}_N}{\partial \bar{y}_N} + H_b \bar{T}_N = H_b \bar{T}_b f_b(\theta) \quad (8)$$

$$\theta=0, \theta_0; \quad \bar{T}_i=0 \quad ; i=1 \sim N \quad (9)$$

Fig.1 Analytical model and coordinate systems

また、式(1)～(9)において、次の無次元量を導入した。

$$\begin{aligned} \tau &= \kappa_0 t / b^2, (\bar{T}_i, \bar{T}_a, \bar{T}_b) = (T_i, T_a, T_b) / T_0, \\ (\rho, \bar{y}_i, \bar{t}_i, \bar{H}_i, \bar{a}) &= (r, y_i, t_i, H_i, a) / b, (H_a, H_b) = (h_a, h_b) / b \\ (\bar{\kappa}_r, \bar{\kappa}_\theta) &= (\kappa_r, \kappa_\theta) / \kappa_0, \bar{\lambda}_r = \lambda_r / \lambda_0 \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 t は時間、 T_i は温度変化、 κ_r, κ_θ はそれぞれ各層の r, θ 方向の温度伝導率、 λ_r は r 方向の熱伝導率、であり、 T_0, κ_0, λ_0 はそれぞれ基準となる温度、温度伝導率、熱伝導率を意味する。条件式(4)～(9)を満足する式(3)の解は、 θ に関する有限サイン変換と τ に関するラプラス変換を用いて次式のように求められる。

$$\bar{T}_i = \sum_{k=1}^N \bar{T}_k \sin q_k \theta \quad ; i = 1 \sim N \quad (11)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{T}_k &= \frac{2}{\theta_0} \left[\frac{1}{F} \{ \bar{A}'_i \exp(\gamma_1^{(i)} \bar{y}_i) + \bar{B}'_i \exp(\gamma_2^{(i)} \bar{y}_i) \} \right. \\ &+ \sum_{j=1}^M \frac{2 \exp(-\mu_j^2 \tau)}{\mu_j \Delta'(\mu_j)} [\bar{A}_i \exp(\lambda_{1j}^{(i)} \bar{y}_i) + \bar{B}_i \exp(\lambda_{2j}^{(i)} \bar{y}_i)] \\ &+ \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\mu_j^2 \tau)}{\mu_j \Delta'(\mu_j)} [\bar{A}_i \cos(\beta_{ij} \bar{y}_i) + \bar{B}_i \sin(\beta_{ij} \bar{y}_i)] \exp(\alpha_{ij} \bar{y}_i) \bigg] \end{aligned} \quad (12)$$

2. 2 熱弾性解析 2. 1節で導いた温度変化により生じるクロスプライ積層円筒パネルの非定常熱応力、熱変形を平面ひずみ問題として解析する。式(2)を考慮した応力-ひずみ関係式と式(2)を考慮した変位-ひずみ関係式をつり合い方程式に代入すれば、各層の変位成分の満足すべき方程式の無次元表示は次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11i} (\bar{u}_{ri, \bar{y}_i} + \bar{H}_i^{-1} \bar{u}_{ri, \bar{y}_i}) + \bar{H}_i^{-2} (\bar{C}_{12i} - \bar{C}_{22i}) \bar{u}_{ri} + \bar{C}_{66i} \bar{H}_i^{-2} \bar{u}_{ri, \theta\theta} \\ + (\bar{C}_{12i} + \bar{C}_{66i}) \bar{H}_i^{-1} \bar{u}_{\theta i, \bar{y}_i} + (\bar{C}_{12i} - \bar{C}_{22i} - \bar{C}_{66i}) \bar{H}_i^{-2} \bar{u}_{\theta i, \theta} \\ = \bar{\beta}_{ri} \bar{T}_i + \bar{H}_i^{-1} (\bar{\beta}_{ri} - \bar{\beta}_{\theta i}) \bar{T}_i \quad (13) \\ (\bar{C}_{66i} + \bar{C}_{12i}) \bar{H}_i^{-1} \bar{u}_{ri, \bar{y}_i} + (2\bar{C}_{66i} + \bar{C}_{22i}) \bar{H}_i^{-2} \bar{u}_{ri, \theta} \\ + \bar{C}_{66i} (\bar{H}_i^{-1} \bar{u}_{\theta i, \bar{y}_i} - 2\bar{H}_i^{-2} \bar{u}_{\theta i} + \bar{u}_{\theta i, \bar{y}_i}) + \bar{C}_{22i} \bar{H}_i^{-2} \bar{u}_{\theta i, \theta\theta} \\ = \bar{H}_i^{-1} \bar{\beta}_{\theta i} \bar{T}_i \quad (14) \end{aligned}$$

円筒パネルの内外表面・界面での力学的境界条件は次式で示される。

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= -\frac{\bar{t}_1}{2} ; \quad \bar{\sigma}_{r1} = 0, \bar{\sigma}_{r\theta1} = 0 \\ \bar{y}_i &= \frac{\bar{t}_i}{2}, \bar{y}_{i+1} = -\frac{\bar{t}_{i+1}}{2} ; \quad \bar{\sigma}_{ri} = \bar{\sigma}_{r,i+1}, \bar{\sigma}_{r\theta} = \bar{\sigma}_{r\theta,i+1}, \\ &\quad \bar{u}_{ri} = \bar{u}_{r,i+1}, \bar{u}_{\theta i} = \bar{u}_{\theta,i+1} \\ \bar{y}_N &= \frac{\bar{t}_N}{2} ; \quad \bar{\sigma}_{rN} = 0, \bar{\sigma}_{r\theta N} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、円筒パネルの端面が以下のような境界条件のもとで単純支持されている場合を考える。

$$\theta = 0, \theta_0 ; \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = 0, \bar{u}_{ri} = 0 \quad (16)$$

まず、式(16)を満足するように式(13),(14)の解を次式のように表示する。

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ri} &= \sum_{k=1}^N \{ U_{rcik}(\bar{y}_i) + U_{rpik}(\bar{y}_i) \} \sin q_k \theta \\ \bar{u}_{\theta i} &= \sum_{k=1}^N \{ U_{\theta cik}(\bar{y}_i) + U_{\theta pik}(\bar{y}_i) \} \cos q_k \theta \end{aligned} \quad (17)$$

上式の右辺第1項は式(13),(14)の同次解を表し、第2項は

特解を表す。まず、同次解を求める。 $U_{rcik}(\bar{y}_i), U_{\theta cik}(\bar{y}_i)$ を

$$\{ U_{rcik}(\bar{y}_i), U_{\theta cik}(\bar{y}_i) \} = (U_{rcik}^0, U_{\theta cik}^0) \exp(p_i \bar{y}_i) \quad (18)$$

のように置き、式(17)の右辺第1項を式(13),(14)の同次式に代入し、 $U_{rcik}^0, U_{\theta cik}^0$ が非自明な解を持つ条件から次式が得られる。

$$A^{(i)} p_i^4 + B^{(i)} p_i^3 + C^{(i)} p_i^2 + D^{(i)} p_i + E^{(i)} = 0 \quad (19)$$

式(19)の根は、(1)異なる4実根(2)異なる2組の共役複素根(3)異なる2実根+1組の共役複素根の3通りの場合が考えられ、それぞれ解の関数系は異なる。たとえば、異なる4実根を持つ場合、式(19)の根を $p_{ij}(j=1\sim4)$ とすれば、

$$\begin{aligned} U_{rcik}(\bar{y}_i) &= \sum_{j=1}^4 F_{ij} \exp(p_{ij} \bar{y}_i) \\ U_{\theta cik}(\bar{y}_i) &= \sum_{j=1}^4 M_{ij} F_{ij} \exp(p_{ij} \bar{y}_i) \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、

$$M_{ij} = -\frac{(\bar{C}_{12i} + \bar{C}_{66i}) p_{ij} \bar{H}_i + (2\bar{C}_{66i} + \bar{C}_{22i})}{\bar{C}_{66i} (p_{ij}^2 \bar{H}_i^2 + p_{ij} \bar{H}_i - 2) - \bar{C}_{22i} q_k^2} q_k \quad (21)$$

なお、式(20)の F_{ij} は未定定数である。次に、式(13),(14)の特解は式(12)の温度解と同様な関数系として求められる。最後に、上述で得られた変位成分を変位-ひずみ関係式および応力-ひずみ関係式に代入することによって応力成分が得られるが、式(20)中の未定定数は力学的境界条件式(15)より決定される。

3. 数値計算例

前章で導いた理論解に対する数値計算結果を以下に示す。数値計算例として、アルミナ繊維強化アルミニウム複合材料を選び、同一のプライによる3層のクロスプライ積層円筒パネルを想定し、各層の板厚を同じであると仮定した。配向順序が(90°/0°/90°)である3層のクロスプライ対称積層円筒パネルの外表面が局部加熱される場合を想定した。ただし、配向角0°は z 軸方向を示すものとする。すなわち、加熱条件および形状に関する数値計算諸元を次式により与えた。

$$H_a = H_b = 5.0, \bar{T}_a = 0, \bar{T}_b = 1, \theta_0 = 85^\circ, \bar{a} = 0.85$$

$$f_b(\theta) = \begin{cases} \theta^2 / \theta_b^2 : -\theta_b \leq \theta' \leq \theta_b \\ 0 : \theta' \leq -\theta_b, \theta_b \leq \theta' \end{cases}$$

$$\theta_b = 15^\circ, \theta' = \theta - \theta_0 / 2$$

(22)

数値計算結果の一例を図2に示す。

Fig. 2 Variation of the thermal stress $\bar{\sigma}_r$ ($\theta = \theta_0 / 2$)

参考文献

(1) 大多尾・谷川, 機講論, No.00-17 (2000), 263-264.