The consideration on finite difference lattice Boltzmann method

○学 栗田誠 (神戸大), 正 蔦原道久 (神戸大), 学 岩上武善 (神戸大)

Makoto KURITA*, Michihisa TSUTAHARA* and Takeyoshi IWAGAMI*

Graduate School of Science and Technology, Kobe University, 1-1 Rokkodaicho, Nada-kuKobe-shi, Hyogo 657-8501, Japan

We propose a technique to speed-up the calculation in the finite difference lattice Boltzmann method (FDLBM), and the numerical analysis of two-dimensional incompressible flows is done. The results are compared with these by FDM and analytical results, and the technique presented in this note is shown to be good.

Key Words: Lattice Boltzmann Method, Computational Fluid Mechanics, Viscous Flow

1. 緒言

格子ボルツマン法 (LBM) は、流体が衝突と並進を繰り返して行う多数の粒子により構成されていると考える流体の数値シミュレーション法である¹⁾。本手法に関する研究では、これまで非熱非圧縮流体が主に取り扱われてきたが^{2), 3)}、最近熱の効果を考慮した熱流体モデルが提案され、様々な流れ場においてその有効性が計算され確認されている^{4) - 7)}。しかしながら LBM では空間を離散化する際、等方性を維持する規則的な格子によって一様に離散化されるために、複雑な形状をした物体回りの計算が困難である。また単一時間緩和係数の値に制限があるために、高レイノルズ数流れを計算する際、不安定になるなどの問題点がある。そこで本報では、この問題点を解決するひとつの方法として、物理的形状と離散的粒子速度を独立に扱えるようにした差分格子ボルツマン法 (FDLBM) を取り上げ、それを用いた数値解析を行う。また FDLBM の計算時間を短縮させることを目的としたモデルを提案し、そのモデルの妥当性を検討する。

2. 理論

FDLBM は、格子と離散的粒子速度を独立に扱うことができる。ここでは非圧縮流体を取り上げ、離散的粒子速度には正方格子の 2 次元 9 速度 (2D9V) モデルを用いる。粒子は格子点上に静止するか、または 1 タイムステップ間に離散的粒子速度の格子形状にしたがって i 方向 ($i=1, 2, \dots, 8$) に移動し、移動量の推定には対流項の差分計算により、各格子点ごとの粒子分布が算出される。衝突には粒子の質量、運動量および熱流体ではエネルギーを保存するような衝突則にしたがって各格子点上で同時に行われる。一連の粒子運動は時刻 t 、位置 $\mathbf{x}$ の格子点上で速度 $\mathbf{c}_i$ をもつ粒子数密度を表す分布関数 $f_i(\mathbf{x}, t)$ を用いて次式で表される。

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\phi} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{(0)}(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

ここで ϕ は単一時間緩和係数であり、 $f_i^{(0)}$ は局所的な平衡状態での分布関数を示す。右辺の衝突演算は、衝突により粒子分布が平衡状態に向かうことを表している。この衝突形式を格子 BGK モデル⁸⁾ と呼ぶ。

局所平衡分布関数 $f_i^{(0)}$ は非圧縮流体における 2D9V モデルでは次式で与えられる。

$$f_{\text{phi}}^{(0)} = \rho_p \left[1 + \frac{C_{\text{phi} \alpha} U_{\alpha}}{C_s^2} + \frac{U_{\alpha} U_{\beta}}{2 C_s^2} \left(\frac{C_{\text{phi} \alpha} C_{\text{phi} \beta}}{C_s^2} - \delta_{\alpha \beta} \right) \right] \quad (2), (3), (4)$$

$$C_s = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t_0 = \frac{4}{9}, t_1 = \frac{1}{9}, t_2 = \frac{1}{36}$$

また各格子点における流体の状態は、LBM の場合と同様で全粒子に重みをかけて足し合わせたものに等しくなる。各格子点上における流体の密度および運動量は以下のように示される。

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{c}_i \quad (5), (6)$$

FDLBM における基礎方程式(1)は流体を構成する離散的粒子の運動を記述したものであり、巨視的、連続的な流体運動は記述されていないため、(1)から Navier-Stokes 方程式を導出しなければいけない。(1)を Chapman-Enskog 展開と類似した方法を用いることによって、微視的な離散的粒子運動と巨視的な連続体としての流体運動を関連付けることができる。その結果、流体の動粘性係数 ν は単一時間緩和係数 ϕ との間に $\nu \sim \phi$ の関係で与えられる。この場合、計算を安定に進めるためには時間刻みを Δt とした時に $\Delta t / \phi < 0.5$ の条件を満たす必要がある。そのため高レイノルズ数流れを計算するためには Δt を非常に小さく設定する必要があり、その結果初期からある程度時間経過した後の流体の状態を得るまでに膨大な計算時間を要する。そこでこの問題点を解決するための方法を以下に提案する。

FDLBM の基礎方程式(1)の左辺に新たに項を足し合わせた次式を基礎方程式として定義する。

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i - a \mathbf{c}_i \cdot \nabla \frac{f_i^{(1)}}{\phi} = -\frac{1}{\phi} (f_i - f_i^{(0)}) \quad (7)$$

ここで a は定数であり、 $f_i^{(1)} \approx f_i - f_i^{(0)}$ とする。(7)から同様に導出される ν と ϕ の関係は $\nu \sim \phi - a$ となる。計算を安定に進めるための条件は $\Delta t / \phi < a$ であるため、高レイノルズ数流れを計算する場合においても Δt をある程度大きく設定することができ、計算時間を短縮することができると考えられる。

3. 解析結果

新たな基礎方程式(7)の時間発展を前進オイラー法で記述すると次式で示される。

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t \left[-\left(1 - \frac{a}{\phi}\right) \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i - \frac{a}{\phi} \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i^{(0)} - \frac{1}{\phi} (f_i - f_i^{(0)}) \right] \quad (8)$$

本解析では対流項を 3 次精度の風上差分、時間発展を 2 次精度のルンゲ・クッタ法を用いた。

解析例として、まず $Re=100$ における 2 次元 Couette 流の結果を Fig.1 に示す。上下両端の境界条件を粘着条件とし、また単一時間緩和係数に関しては $\phi = 3\nu + a$ とした。格子は

等間隔に設定した。図に Navier-Stokes 方程式の解析解を実線で表記しているが、FDLBM の計算結果と非常によく一致を示している。また、 a の値を変化させた場合においても同様の結果が得られた。

次に $Re=1000$ における 2 次元 Cavity 内の流れの結果を Fig.2 に示す。境界条件は Couette 流同様上下左右の壁において粘着条件を用いている。格子は壁面付近に集中させ不等間隔に設定した。Fig.3 に Navier-Stokes 方程式を差分法で解いた結果を示すが、渦の中心位置など Cavity 内の全領域においても FDLBM の計算結果とよく一致している。Fig.4 にはそれぞれ垂直方向および水平方向の中心線上における速度分布を示す。実線で差分法を用いて解いたものを表記するが、これも FDLBM の計算結果とよく一致している。計算時間に関しても従来型の FDLBM に対して Δt を 10 倍程度大きく設定することができるため、精度を落とすことなく計算時間を短縮することができている。

4. 結言

従来の基礎方程式に新たに項を足し合わせた FDLBM の基礎方程式を用いて、2 次元非圧縮流体の解析を行った。直交座標系において等間隔、不等間隔双方において FDLBM の計算法としての妥当性を確認することができ、複雑な形状をした物体回りの計算に関しても、境界適合座標系を用いることによって同様に計算できる可能性を示すことができた。

引用文献

- 1) G.McNamara & G.Zanetti: *Phys. Rev. Lett.* 61(20) (1998) 23
- 2) G.McNamara & B. Alder: *Microscopic Simulations of complex Hydrodynamics Phenomena.* (1992) 125-136
- 3) D.O.Martinez, W.H.Matthaeus, & S.Chen: *Phys. Fluids* 6 (3). (1994) 1285-1298
- 4) G.McNamara and B. Alder: *Physica A* 194(1993) 218
- 5) F.J.Alexander, S. Chen & D.J.Sterling: *Phys. Rev. E* 47(1993) 2249-2252
- 6) Y.Chen, H. Ohashi & M. Akiyama: *Phys. Rev. E* 50(1994) 2726-2783
- 7) 薦原, 高田, 山越: 日本航空宇宙学会第 27 期年会講演会講演論文集(1996) 80-81
- 8) Y.H.Qian, D.d Humieres & P.Lallemand: *Europhys. Lett.* 17(1992) 479-484

Fig.1 Development of velocity profile in Couette flow

Fig.2 Streamline in square cavity at Reynolds number 1000 by FDLBM ($a=0.5$)

Fig.3 Streamline in square cavity by finite difference method

Fig.4 Flow velocity distribution in square cavity