912 乱れによる熱および運動量輸送のラグランジュ的見地からの検討

A Study on Turbulent Momentum and Heat Transfer from Lagrangian Trajectories of Fluid Particles

学 小野 貴政 (阪市大院) 正 加藤 健司 (阪市大)
正 東 恒雄 (阪市大)

Takamasa ONO, Kenji KATOH and Tsuneo AZUMA

Dept. of Mech. Eng., Osaka-City Univ., Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585

The turbulent momentum and heat transfers were investigated using the equations of motion and of energy written in Lagrangian description. The correlation between pressure gradient and vertical velocity depresses the Reynolds stress while the corresponding term due to the mean temperature gradient in the streamwise direction enhances the turbulent heat transfer, which leads the dissimilarity between momentum and heat transfer. The results of numerical analysis using DNS data verifies the above expectation although those effects are relatively small compared with the mixing type momentum or heat transfers.

Keywords : Turbulent Flow, Heat Transfer, Turbulent Prandtl Number, Lagrangian Equation

1. 緒言

乱流場における運動量と熱輸送の間には、互いに相似な関係があることがよく知られている。しかしながら、壁面より離れた対数法則領域では、一般に乱流プラントル数 Pr_t は 1 より若干小さくなり、両者の間に非相似性が認められる^[1]。本研究では、ラグランジュ表示した運動およびエネルギー方程式を用い、運動量と熱輸送の非相似性が生じる原因を考察する。直接数値計算(DNS)により得られた方程式の解のデータベースを利用して、移動する流体粒子を追跡し、運動量および熱輸送に影響を与える諸要因について検討を行う。

2. ラグランジュ方程式を利用した運動量・熱輸送の検討

ラグランジュ表示した x 方向(流れ方向)運動方程式は、次式のよう

$$\frac{d\tilde{u}^+}{dt^+} = -\frac{\partial \tilde{p}^+}{\partial x^+} + \nabla^2 \tilde{u}^+ \quad \dots (1)$$

～は、瞬時値を表す。また $\tilde{u}^+$ は、壁指標で無次元化した量を表す。ここでは、時刻 $t^+=0$ で $y^+=y_a^+$ にある流体粒子を、時間 $t_a^+(<0)$ まで遡って追跡する。式(1)を時間 $t^+=t_a^+$ から $t^+=0$ まで積分し、 $t^+=0$ における粒子の y 方向速度 $\tilde{u}_a^+$ を乗じて整理すると、 $y^+=y_a^+$ で観測されるレイノルズ応力は次式で表される^[2]。

$$-\overline{u_a^+ v_a^+} = \underbrace{-\overline{u_a^+ v_a^+}}_{(A)} - \underbrace{\overline{v_a^+ (U_b^+ - U_a^+)}}_{(B)} + \underbrace{\int_{t_a^+}^0 \overline{v_a^+ \frac{\partial p^+(r^+)}{\partial x^+}} ds^+}_{(C)} - \underbrace{\int_{t_a^+}^0 \overline{v_a^+ \nabla^2 \tilde{u}^+(r^+)} ds^+}_{(C)} \quad \dots (2)$$

u_a^+ , v_a^+ は、 $t^+=0$ で $y^+=y_a^+$ にある粒子の変動速度成分である。また U_b^+ および U_a^+ は、時刻 $t^+=t_a^+$ および $t^+=0$ における粒子の y 座標 y_b^+ および y_a^+ での時間平均速度である。 $\overline{\quad}$ は、追跡した流体粒子全体のアンサンブル平均を表す。式(2)において、右辺第2項(A)は、上記平均速度差に基づく運動量輸送を表し、第3項(B)および第4項(C)は、粒子の運動中、圧力勾配および粘性応力による加速の効果を表す。

壁面熱流束一定条件での、ラグランジュ表示したエネルギー方程式を考える。

$$\frac{d\tilde{\theta}^+}{dt^+} = \frac{2}{Re} \tilde{u}^+ + \frac{1}{Pr} \nabla^2 \tilde{\theta}^+ \quad \dots (3)$$

θ は温度を表す。右辺第1項は、流れ方向への平均的な温度勾配による対流輸送を表す。 Re は、流路高さおよび平均速度で定義したレイノルズ数で、 Pr はプラントル数である。本研究では、 $Pr=1$ の流体を考察の対象とする。運動方程式と同様、式(3)を時間積分して整理すると、式(2)と類似な次式が導かれる。

$$-\overline{\theta_a^+ v_a^+} = \underbrace{-\overline{\theta_a^+ v_a^+} - \overline{v_a^+ (\theta_b^+ - \theta_a^+)}}_{(A)} - \underbrace{\frac{2}{Re} \int_{t_a^+}^0 \overline{v_a^+ \tilde{u}^+(r^+)} ds^+}_{(B)} - \underbrace{\frac{1}{Pr} \int_{t_a^+}^0 \overline{v_a^+ \nabla^2 \tilde{\theta}^+(r^+)} ds^+}_{(C)} \quad \dots (4)$$

右辺第2項(A)は、式(2)と同様、 y_b^+ および y_a^+ での平均温度差 $(\theta_b^+ - \theta_a^+)$ に基づく熱輸送量を表す。第3項(B)は、流れ方向平均温度勾配からの影響を表し、第4項(C)は、粒子の移動中、周囲流体からの熱伝導の効果を表している。式(4)中の(A)および(C)は、式(2)中の(A)および(C)に対応し、速度場と温度場が相似であれば互いにほぼ等しい値をとると予想される。一方、(B)は、式(2)中の圧力勾配による(B)とは機構が若干異なる。ここでは、これら2つの運動量および熱輸送への影響について考察する。

まず、式(4)中の(B)について考える。 $v_a^+<0$ を持ち、 $y^+>y_a^+$ から y_a^+ に到着した粒子は、 $v_a^+>0$ で $y^+<y_a^+$ より到着した粒子よりも移動中の流れ方向速度が平均的に大きいと考えられる。したがって、式(4)の(B) >0 となり、乱れ熱輸送に対し、正の寄与を与える。次に、式(2)の(B)について、図1に模式的に示した渦構造から考察する。渦中心は周囲よりも低圧であることを考慮すれば、図中の ejection に対応する $v>0$ をもつ領域 I では、流れ方向に圧力は小さくなり、 $(\partial p^+/\partial x^+)<0$ と考えられる。一方、 $v<0$ の sweep 領域 II では、逆に $(\partial p^+/\partial x^+)>0$ となる。以上のことから、速度 v と圧力勾配の相関は平均的には負になると予想される。この結果、式(2)中の(B)は、(B)とは逆に運動量輸送に対し負の寄与を与えると考えられる。これらの効果は小さいが、壁面から離れ、運動量および熱輸送量が小さくなる領域では、その寄与が大きくなる可能性がある。

Fig.1 Vertical velocity and pressure gradient induced by horse shoe vortex

3. 数値計算結果および考察

3.1 計算方法 本研究では発達した平行二平板間流れを扱う。摩擦速度により定義したレイノルズ数 $Re_\tau=300$, $Pr=1$ および壁面からの熱流束が一定の条件の下, Navier-Stokes 方程式及びエネルギー方程式を差分法による直接数値計算(DNS)により解析した^{[3][4]}。得られたデータベースを利用して, 流体粒子の軌跡を求め, 移動中の運動量, 熱収支を計算した。格子数は $64 \times 64 \times 64$ (x, y, z), 4次精度中心差分, 速度場の時間発展に3次 Adams-Bashforth 法, 温度場の時間発展に3次省容量型 Runge-Kutta 法を用いた。追跡する流体粒子の数は各 y 断面で 4096 個, 流体粒子の位置は, 時間間隔 $\Delta t^+=0.06$ ごとに決定した。各位置での粒子速度は3次元線形補間により求め, 3次省容量型 Runge-Kutta 法による時間発展により移動する位置の計算を行った。

3.2 計算結果 図2に, $u_a v_a$ および $\theta_a v_a$ の相関係数の時間 t_b^+ に対する変化の一例を示す。両者は互いによく似た値となっており, 相関係数が0となる時刻もほぼ同じである。粒子の移動中, u_b と θ_b は互いに相似な挙動を示すことがうかがわれる。

乱れによる運動量および熱輸送の機構の差異を検討するため, 式(2)および式(4)右辺各項の寄与を算出した結果を図3に示す。図3は, 図2に示した $u_b v_b$, $\theta_b v_b$ の相関値がほぼ0となる時刻 $t_b^+=-90$ に対するものである。壁面に近い領域では, 平均速度・温度差に基づく運動量・熱輸送の寄与(A), (A')ならびに粘性および熱伝導の寄与を表す(C), (C')が支配的である。一方, $y^+ > 60$ 以上では, 乱れによる運動量・熱輸送に及ぼす粘性・熱伝導の影響は小さい。図3中の(A)および(A')の比を図4に示す。図1の結果からも予想されるように, これらの値は流路全体にわたり互いにほぼ等しいことがわかる。粘性および伝導の寄与(C)および(C')の比も壁面近傍でほぼ1となる。したがって, 壁面近傍では乱れによる運動量・熱輸送は互いに相似であり, 乱流プラントル数の値もほぼ1に等しくなるといえる。

図3より, 式(2)および式(4)中の(B)および(B')の寄与は全体的に小さいものの, 2章で考察したように熱・運動量輸送に対し, それぞれ正負の寄与を与えている。図5は, v_a^+ と $(\partial p^+ / \partial x^+)$ の相関値, すなわち式(2)中の(B)の被積分関数の時間変化を表したものである。前述したように, $t^+=0$ 付近で相関が負になることがわかる。壁面近傍の $y^+=22$ ならびに $u_a^+ v_a^+$ および $u_a^+ \theta_a^+$ が小さくなる $y^+=118$ において, (B)および(B')の $u_a^+ v_a^+$ および $u_a^+ \theta_a^+$ への寄与率を計算すると, (B)はそれぞれ -0.9%, -6.9%, (B')ではそれぞれ 0.6%, 5.4% となる。これらの寄与は小さいが, 運動量と熱輸送の非相似性の一因となる。壁面から離れた領域ではその影響が相対的に大きくなるため, 乱流プラントル数を1より小さくする効果があるといえる。

4. 結言

ラグランジュ表示した運動およびエネルギー方程式を用い, 乱れによる運動量と熱輸送の非相似性が現れる原因について考察した。流体粒子の移動中の運動量, 熱収支の計算結果から, 平均速度・温度差に基づく輸送量ならびに分子粘性および伝導の寄与は, 互いに相似であることが示された。流れ方向平均温度勾配による対流熱輸送および圧力勾配の影響は, 乱れによる熱および運動量輸送に対しそれぞれ正負の寄与を及ぼす。これらの値は小さいものの, 壁面から離れた領域ではその影響は相対的に大きくなり, 運動量と熱輸送の非相似性の一因となる。

文献

- [1] Kays, W.M., J. Heat Transfer, 116 (1994), 284-295
- [2] Bernard, P.S. & Handler, R.A., J. Fluid Mech., 220 (1990), 99-124
- [3] 梶島岳夫, 機論, 60-574 B (1994), 2058-2063
- [4] Kasagi et al., J. Heat Transfer, 114 (1992), 598-606

Fig.2 Correlation coefficients of streamwise velocity and temperature to vertical velocity at $y^+=29.6$

Fig.3 Lagrangian decomposition of momentum and heat transfer in turbulent flow

Fig.4 Ratio of $v_i^+ (U_i^+ - U_i^-)$ to $v_i^+ (\theta_i^+ - \theta_i^-)$

Fig.5 Time development of $v_a^+ (dp^+ / dx^+)$ correlation