1211 準ニュートン法を用いた状態依存型リッカチ方程式に基づく非線形設計法 Nonlinear Control Design Method Based on State-Dependent Riccati Equation(SDRE) Via Quasi-Newton Method

正 井前 譲 (阪府大) ○ 相模 宏樹 (阪府大)
Joe IMAE, Osaka Prefecture University, 1-1 Gakuen-cho, Sakai-shi, Osaka
Hiroki SAGAMI, Osaka Prefecture University

State-Dependent Riccati Equation (SDRE) method is a recently developed technique for control of nonlinear systems. SDRE allows us to apply linear control theory to the design for non-linear controllers. However, the reports on the experimental results of SDRE method are not so many, so far. It is due to the difficulty in solving Algebraic Riccati Equation in real time. This paper proposes a new method for solving Algebraic Riccati Equation, which involves the use of Quasi-Newton method, and shows simulation and experiment results.

Key Words: State-Dependent Riccati Equation, Quasi-Newton Method, Broyden's Method

1 はじめに

SDRE設計法とは、状態依存型リッカチ方程式(SDRE)に基づいた非線形制御系設計法である。この設計法の特徴は、線形レギュレータ理論等の線形理論を非線形制御系の設計に適用することができる点にある⁽¹⁾。

しかし、この設計法は実用例が少ないのが現状である。その大きな理由としてリアルタイムでリッカチ方程式を解かなければならないことが挙げられる。

本論文では、代数リッカチ方程式の解法として準ニュートン法による新たな解法を提案する。その使用例としてクレーンの振れ止め制御を取り上げ、その実用性を検証する。

2 SDRE非線形レギュレータ理論の概要

非線形システム

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

に対して、評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T Q(x)x + u^T R(x)u] dt \quad (2)$$

を最小にする制御入力 u を求めることを考える。ただし、 $Q(x) \geq 0$, $R(x) > 0$ とする。これが非線形制御系におけるレギュレータ問題である。

さて、この問題をSDRE設計法で解く場合、式(1)は

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (3)$$

という形式で書き改めることが必要である。ただし、任意の x に対して、以下のことを仮定する。

【仮定 1】: $\{A(x), B(x)\}$ は可制御である。

【仮定 2】: $\{Q/2(x), A(x)\}$ は可観測である。

以上の仮定のもとで本問題を考えると、評価関数 J を最小にする制御入力 u は、

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 $P(x)$ は状態依存型リッカチ方程式 $A^T(x)P(x) + P(x)A(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0$ (5) の唯一の正定解である。

Fig. 1 Crane Model

3 クレーンモデル

制御対象としてFig.1に示すようなクレーンモデルを取り上げ、その振れ止め問題について考える。

このモデルの方程式は、

$$\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & J+ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_c \dot{x} + ml \dot{\theta} \sin \theta + ku \\ -c_p \dot{\theta} + mgl \sin \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

で表される。

さて、状態変数を $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$ とすると、本モデルの状態方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{\alpha_0(x_2)} \{ (J+ml) (-c_c x_3 - ml x_4^2 \sin x_2) \\ &\quad + ml \cos x_2 (-c_p x_4 - mlg \sin x_2) + (J+ml)ku \} \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\alpha_0(x_2)} \{ ml \cos x_2 (-c_c x_3 - ml x_4^2 \sin x_2) \\ &\quad + (M+m) (-c_p x_4 - mlg \sin x_2) + mlk \cos x_2 \} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ただし、

$$\alpha_0(x_2) = (J+ml^2)(M+m) - m^2 l^2 \cos^2 x_2 \quad (8)$$

とする。この状態方程式から $A(x)$ と $B(x)$ を導出すると、

$$A(x) = \frac{1}{\alpha_0(x_2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_0(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0(x_2) \\ 0 & a_{32}(x) & a_{33}(x) & a_{34}(x) \\ 0 & a_{42}(x) & a_{43}(x) & a_{44}(x) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B(x) = \frac{1}{\alpha_0(x_2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (J+ml)k \\ mlk \cos x_2 \end{bmatrix}$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_{32}(x) &= -m^2 l^2 g \cos x_2 \sin x_2 \\ a_{33}(x) &= -(J+ml)c_c \\ a_{34}(x) &= -(J+ml)mlx_4 \sin x_2 - mlc_p \cos x_2 \\ a_{42}(x) &= -(M+m)mlg \sin x_2 \\ a_{43}(x) &= -mlc_c \cos x_2 \\ a_{44}(x) &= -m^2 l^2 x_4 \cos x_2 \sin x_2 - (M+m)c_p \end{aligned} \quad (10)$$

のように表される。

4 準ニュートン法によるリッカチ方程式の解法

4.1 準ニュートン法の概要

$x \in R^n$ に対する n 次元連立非線形方程式

$$f(x) = 0 \quad (11)$$

の数値解法としてはニュートン法がよく知られている。これは、まず第 i 近似解 x_i を中心にしてテイラー展開して 1 次の項まで近似して、

$$f(x_i + \Delta x_i) \cong f(x_i) + \nabla f(x_i) \Delta x_i \quad (12)$$

とする。次に上式の右边を 0 にすることによって得られる解

$$\Delta x_i = -\{\nabla f(x_i)\}^{-1} f(x_i) \quad (13)$$

を用いて第 $i+1$ 近似解 x_{i+1} を

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad (14)$$

とする。以上のことを繰り返すことにより、式(13)の近似解 x^* を得るというものである。

これに対して、ある行列 H_i がヤコビ行列 $\nabla f(x_i)$ の逆行列を近似するように逐次 H_i を変化させることにより、ニュートン法のもつ収束性を得ようとする一連の方法を準ニュートン法と呼ぶ。

連立非線形方程式に対する準ニュートン法の代表例としては、次の更新公式(Broyden の公式)

$$H_{i+1} = H_i + \frac{(\delta_i - H_i \gamma_i) \delta_i^T H_i}{\delta_i^T H_i \gamma_i} \quad (15)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \delta_i &= x_{i+1} - x_i \\ \gamma_i &= f(x_{i+1}) - f(x_i) \end{aligned} \quad (16)$$

が挙げられる^{(2),(3)}。

4.2 解法アルゴリズム

本論文で提案するアルゴリズムは、リッカチ方程式

$$F(P) = -A^T P - PA + PBR^{-1}B^T P - Q = 0 \quad (17)$$

を列展開することによってベクトル化して、それを連立非線形方程式とみなして準ニュートン法で解くというものである。

なお、ここでは行列 P を列展開したものを $\text{vec}P$ と表すことにする。

【解法アルゴリズム】

Step 1: 式(17)の解の初期行列 P_0 、式(15)の初期行列 H_0 、停止条件用の許容値 ε を与え、 $i=0$ とする。

Step 2: P_i から式(17)より $\text{vec}F(P_i)$ を得る。

Step 3: 補正ベクトル

$$\delta \text{vec} P_i = -H_i \text{vec} F(P_i)$$

を計算する。

Step 4: $\text{vec}P_{i+1}$ を

$$\text{vec} P_{i+1} = \text{vec} P_i + \delta \text{vec} P_i$$

として計算する。

Step 5: $\text{vec}P_{i+1}$ から $\text{vec}F(P_{i+1})$ を計算する。ここで、

$$\|\text{vec} F(P_{i+1})\| < \varepsilon$$

ならば P_{i+1} を式(17)の解とみなして停止する。そうでなければ Step 6 へ。

Step 6: $\delta_i = \text{vec}P_{i+1} - \text{vec}P_i$ 、 $\gamma_i = \text{vec}F(P_{i+1}) - \text{vec}F(P_i)$ を計算する。

Step 7: $i=i+1$ において Step 2 へ。

以上が準ニュートン法によるリッカチ方程式の解法アルゴリズムである。なお、準ニュートン法の収束性は P_0 と H_0 に大きく依存するため、これらを適切に選ばなければならない。1つの方法として、 P_0 については $A_0 = A - BR^{-1}B^T P_0$ が安定行列となるように、また、 H_0 については

$$H_0 = [A_0^T \otimes I + I \otimes A_0^T]^{-1} \quad (18)$$

となるように選ぶことが挙げられる。

5 数値シミュレーションと実機実験

今回の数値シミュレーション及び実機実験ではステップ幅を 0.01[sec]として、各ステップにおいてリッカチ方程式を解くことにした。

前述したように、リッカチ方程式を準ニュートン法で解く場合、その収束性はリッカチ方程式の初期行列 P_0 と、近似行列の初期行列 H_0 に大きく依存する。そこで、今回は初期ステップにおけるリッカチ方程式の解の初期値 $P_0(x_0)$ 、及び近似行列の初期行列 $H_0(x_0)$ をあらかじめ計算したものを与えることにする。それ以外のステップにおいては、前ステップで最終的に得られたリッカチ方程式の解、あるいは近似行列を初期行列として計算を行うことにした。

シミュレーション及び実験を行った結果を Fig.2 に示す。クレーンのパラメータは $m=1.96[\text{kg}]$ 、 $k=0.98[\text{N/V}]$ 、 $c_c=16.3[\text{kg/sec}]$ 、 $J=0.000447[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ 、 $l=0.125[\text{m}]$ 、 $c_p=0.00402[\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{sec}]$ 、 $m=0.045[\text{kg}]$ 、 $g=9.8[\text{m/sec}^2]$ とした。また、 $Q(x)=\text{diag}(100,1,1,0.1)$ 、 $R(x)=0.02$ 、初期状態を $x_0=[0 \ 3\pi/8 \ 0 \ 0]^T$ とした。

Fig 2. Simulation and Experiment Results

数値シミュレーションにおいて、台車の位置と振れ角が 0 に収束しており、本提案手法の有効性が確認できる。また、実機実験において、静止摩擦の影響により台車位置の偏差が若干残るものの、本手法によるリアルタイム制御が成功していることが確認できる。

6 おわりに

本論文では代数リッカチ方程式の準ニュートン法による解法アルゴリズムを提案した。また、その SDR E 設計法における応用例を示し、提案したアルゴリズムの有用性を確認した。

参考文献

- (1) J.R.Cloutier, "State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Over View", *Proceedings of American Control Conference, Albuquerque, NM, June, 4-6, 1997*
- (2) 今野浩, 山下浩, "非線形計画法", 日科技連出版社, 1978
- (3) 鈴木誠道, 矢部博, 飯田善久, 中山隆, 田中正次, "現代数値計算法", オーム社, 1994