Impact Analysis on Elastic Spherical Shells

正 本田善久(近畿大)

Yoshihisa HONDA, Kinki University, Nishimitani, Uchitacho, Naga-gun, Wakayama

Many researchers have studied the impact phenomenon in ball games, such as golf, tennis, baseball, soccer and so on. Although it is very important to understand the dynamic characteristics of a ball on the impact phenomenon, the sufficient theoretical understanding of the characteristics has not been obtained. In this paper, normal impact of hollow balls on flat surfaces is theoretically analysed and the dynamic deformation of hollow balls is derived as an axisymmetric motion of an elastic spherical shell by using modal expansion method, where variation of contact area is took into account. Numerical calculation has conducted and the dynamic characteristics are discussed.

Key Words: Spherical Shell, Hollow Ball, Normal Impact, Modal Expansion Method

1. はじめに

多くの球技ではボールを打つことが主要なプレーの一つであり、ボール打撃に関する研究が広く行われているが、ラケットやバットなどの打球用具に重点を置いた研究がほとんどであり、衝突時におけるボールの力学モデルの妥当性の理論的確認が十分であるとは言い難い。著者は、前報¹⁾で中空ボールの衝突時における挙動について弾性球殻としての理論解析を試み、球殻が衝突対象と1点のみで接触するものとして定式化して数値計算を行った。しかし、実際には接触は点ではなく面としての拡がり有し、しかもその接触面積は時間とともに変化する。そこで、本報では接触面積を考慮した定式化を行い、得られた式に基づいて数値計算を実施し、衝突中の球殻の中心の変位、球殻に加わる力やエネルギーの流れを調べて、衝突速度と接触時間の関係などについて考察する。

2. 理論式

2.1. 解析モデル 弾性球殻が平面に垂直に衝突する場合を考える(図1)。平面は球殻の衝突によって平面に垂直な方向に変位し、その復元力は変位に比例し平面に垂直に球殻に作用するものとする。したがって、衝突によって球殻に生じる運動と球殻が平面から受ける衝撃力の分布は、平面に垂直な直径に関して軸対称となる。球殻の厚さ h が半径 a に比べて十分小さいとして薄肉殻の理論を用いる。殻の面内の伸縮に加えて曲げの影響についても考慮するが、せん断変形と回転慣性の影響は無視し、変形は線形の範囲内とする。また、減衰、摩擦力、内部の圧力ならびにその変化の影響も無視する。前報と同様に表記を平易にするために無次元化を行い、無次元量を用いる。すなわち、長さ、質量、時間について、それぞれ a , $\rho a^2 h$, $a(\rho/E)^{1/2}$ を基準に無次元化する。ここで、 ρ , E , ν は球殻のそれぞれ密度、ヤング率、ポアソン比である。対称軸からの角度を ϕ 、無次元時刻を τ と表し、殻の中央面での法線方向、子午線方向の

Fig. 1 Analytical Model

無次元変位をそれぞれ $w(\phi, \tau)$, $u(\phi, \tau)$ と表す(図2)。

2.2. 球殻の運動方程式と固有振動¹⁾ 弾性球殻の軸対称振動に関する運動方程式は次式で与えられる²⁾⁻⁵⁾。

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (Q \sin \phi) - (N_\phi + N_\theta) \sin \phi + p_w \sin \phi = \sin \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (N_\phi \sin \phi) - N_\theta \cos \phi + Q \sin \phi + p_u \sin \phi = \sin \phi \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (2)$$

ここで、 p_w , p_u は球殻に作用するそれぞれ法線方向、子午線方向の無次元分布外力であり、それ以外の文字は前報と同じなので記載を省く。

自由振動($p_w = p_u = 0$)に関して、球殻の固有振動は

$$\begin{cases} w(\phi, \tau) \\ u(\phi, \tau) \end{cases} = \exp(i\Omega_n \tau) \begin{cases} W_n(\phi) \\ U_n(\phi) \end{cases} \quad (3)$$

と表すことができる。固有関数 $W_n(\phi)$, $U_n(\phi)$ は、 n 次のルジャンドル多項式を用いて与えられるが、詳細は省く。

2.3. 球殻の応答解析 衝突開始時点の中心の位置を原点とし、平面に向けて垂直な方向に x 軸を取ると、球殻上の角 ϕ の点の x 座標は

$$x = (w+1) \cos \phi - u \sin \phi \quad (4)$$

と表され、 $x > 1$ となる場合に平面から復元力が作用する。その復元力によって球殻に加わる法線方向、子午線方向の分布外力が次のように表されるものとする。

$$p_w = -k(x-1) \cos \phi, \quad p_u = k(x-1) \sin \phi \quad (5)$$

ここで、 k は平面の剛性を表す定数である。

球殻の衝突応答を固有関数展開を用いて次のように表す。

$$w(\phi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(\tau) W_j(\phi), \quad u(\phi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(\tau) U_j(\phi) \quad (6)$$

ただし、表記を簡便にするために固有モードに関する添字は、固有振動数 Ω_n の低いものから順に付けた番号 j に変更している。式(4)~(6)を運動方程式(1), (2)に代入し、固有関数の直交性を用いると、各モードの一般化座標 $q_j(\tau)$ に

Fig. 2 Spherical Shell

関する次の微分方程式が導かれる。

$$M_j \frac{d^2 q_j}{d\tau^2} + K_j q_j = F_j(\tau) \quad (7)$$

$$F_j(\tau) = 2\pi \int (p_w W_j + p_u U_j) \sin \phi d\phi \quad (8)$$

$$M_j = N_j^2, \quad K_j = N_j^2 \Omega_j^2 \quad (9)$$

$$N_j^2 = \frac{4\pi}{2n+1} [1 + C_j^2 n(n+1)] \quad (10)$$

これを数値的に解けば衝突応答が求められる。

3. 数値計算結果と考察

上で導いた式に基づいて数値計算を実施した。球殻の初期条件は、すべての点で変位が零で、平面に向かって垂直な方向に一樣な初速度 v_0 を持つものとしている。ここでは打ち切り項数を 36 とし数値計算を行った結果を示す。図 3 に時刻歴の数値計算結果を示す。

図 3(a) では、中心の変位を破線で、平面から受ける合力を実線で示している。接触時間は 45.4 であり、それは振動モードの固有周期の中の最長のもの (2 次) の約 5.3 倍である。その間の中心の変位はほぼ正弦半波状の変化を示しており、最大変位は 0.015 である。そして、初速度とほぼ同じ大きさの速さで跳ね返っている。一方、平面から受ける合力の時刻歴の曲線の概形は正弦半波よりも三角波に近く、それに短周期の変動成分が重畳している。この変動成分は打ち切り項数に依存するもので、前報の点接触モデルに基づく数値計算結果でも見られたものである。しかし、点接触モデルではその振幅が衝突中ほぼ一定であったが、本計算結果ではその振幅が中心の変位の増加とともに拡大し、変位の減少とともに縮小している点が異なっている。

図 3 (b) は、衝突前の運動エネルギーに対する各モードが持つエネルギーの比の時刻歴であり、1 次から 8 次までの分が示してある。実線が 1 次の剛体並進モードのものであり、衝突開始時には 1 であるが、衝突の進行とともに減少し、中心が最大変位を示すときに 0 となっている。その後は対称的に増加に転じて、衝突終了時点でほぼ 1 にまで戻っている。点線で示したものは 2 次以上の振動モードのもので、スケールを 1 次に対して 10 倍して示してある。各モードのエネルギー比の増減は 1 次と逆の傾向を示し、衝突の過程においてエネルギーが前半では剛体モードから振動モードに流れ、後半では振動モードから剛体モードに戻っていることがわかる。衝突後には振動エネルギーとして残っているのは極めてわずかであり、剛体としての運動エネルギーの衝突前の大部分が衝突後も保存される結果となっている。各振動モードのエネルギー比は、中心の変位が最大となる時刻前後で最大となっており、その最大値は 2 次 (4.34%) から 8 次 (7.96%) まで次数の増加とともにほぼ単調に増加しているが、図に示されていない 9 次 (7.69%) 以降は逆に緩やかに減少していく。流れ込むエネルギーが 8 次前後のモードが最も多いという計算結果は、等価剛性がそれらのモードで最も小さいことに対応しているものと思われる。

図 4 に初速度、平面の剛性が接触時間に及ぼす影響を示す。接触時間は、平面の剛性が大きくなるほど小さくなるが、初速度が 0.001 以上では剛性が 10 と 100 の違いはほとんど見られない。このことから、初速度が 0.001 以上の条件では、剛性が 10 以上ならば球殻だけの特性によって接触時間がほぼ決定すると言え、その場合の平面は剛体平面と同等と考えられる。また、初速度の増加につれて接触時間が単調に減少している。したがって、系を 1 自由度のばね質点系として扱う場合には硬化ばねの非線形系とみなすのが妥当であると考えられる。

4. あとがき

弾性球殻の平面への垂直衝突について理論解析し、接触面積を考慮した衝突応答解析法を定式化した。数値計算を行い、衝突中の中心の変位は正弦半波状の履歴を示すが作用する力は三角波状の履歴を示すこと、したがって非線形の硬化ばね質点系としてふるまうこと、また、比較的遅い衝突速度では衝突前の運動エネルギーが衝突中に主として等価剛性の小さいモード群の振動エネルギーとして蓄えられ、衝突終了時点でほとんど剛体運動のエネルギーに再び戻るため反発係数がほぼ 1 となることなどを示した。

参考文献

- 1) 本田, ボールの衝突解析と力学モデル, 機講論, No. 03-12, 114-118 (2003).
- 2) P. M. Naghdi and A. Kalnins, On vibrations of elastic spherical shells, *J. Appl. Mech.*, 29, 65-72 (1962).
- 3) A. Kalnins, Effect of bending on vibrations of spherical shells, *JASA*, 36, 74-81 (1964).
- 4) H. Kraus, *Thin Elastic Shells*, Wiley (1967).
- 5) W. Soedel, *Vibration of Shells and Plates* (2nd ed.), Marcel Dekker, Inc. (1993).

Fig. 3 Time Histories ($v=0.3$, $a/h=0.02$, $v_0=0.001$, $k=100$)

Fig. 4 Collision Time ($v=0.3$, $h/a=0.02$)