On the resonance instability of shallow-water periodic waves

正 ○片岡 武 (神戸大)

Takeshi KATAOKA, Kobe University, 1-1, Rokkodai, Nada-ku, Kobe

1 緒 言

水面波列の線形安定性を Euler 方程式系を基に調べた。水面波列は、波数と振幅を表す 2 つのパラメータ：

$$k \equiv 2\pi D/L, \quad a \equiv A/D$$

により特徴づけられる (図 1)。ただし、 D ：平均深さ、 L ：波長、 A ：最大高低差。その共鳴条件はこれまで小振幅極限 ($a \rightarrow 0$) において論じられてきた。ここでは浅水波 (長波長) 極限 ($k \rightarrow 0$) における共鳴条件を理論的に調べた。その数値的検証も合わせて示す。なお、物理量は平均深さ D と重力加速度により無次元化した。

2 共鳴条件 I

線形長波の角振動数 $k\sigma_L$ は、速さ v で伝わる水面波列とともに動く座標系から見たとき、

$$\sigma_L(p, q) = -vp \pm \sqrt{p^2 + q^2}, \quad (1)$$

となる。ただし、 (kp, kq) は攪乱の波数ベクトルである。2 線形波による共鳴条件は、 m 個の基本波を介した場合、

$$\sigma_L(p, q) = \sigma_L(p - m, q) \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

となる。(2)の解は、 $p-q$ 平面上において

$$\left(p - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{v^2 - 1} q^2 = \frac{m^2 v^2}{4} \quad (3)$$

と表され、これは楕円である (図 2)。

3 共鳴条件 II

水面波列は長波長極限において孤立波となり、峰方向攪乱のもとで周期的に振動する。その角振動数 $k\sigma_s$ は、

$$\sigma_s(q) = \pm \sqrt{\frac{vEq^2}{dE/dv}}. \quad (4)$$

ここに、 E 、 v は孤立波のエネルギーおよび伝播速さである。(1)と(4)を用いて共鳴条件は、

$$\sigma_L(p, q) = \sigma_s(q), \quad (5)$$

となる。(5)の解は、 $p-q$ 平面上において 2 組の斜め十字線により表される。そのうち、不安定性を示す解は実線、中立安定な解は破線により示した (図 2)。

4 数値的検証

線形安定性解析を数値的に行った結果を示す。図 3 に、 $a = 0.4$ 、 $k = 0.05$ に対する不安定領域の数値結果を、実線で囲まれた領域により示した。対称性より $p-q$ 平面における第一象限のみを表示してある。一方、細い破線は $k \rightarrow 0$ の不安定共鳴曲線である。図 3 より、数値的に求められた不安定領域 (実線で囲まれた領域) は、理論的に求めた不安定共鳴曲線 (破線) 上もしくはその近傍に存在していることが分かる。

Fig. 1 Schematic of unperturbed wave and perturbation.

Fig. 2 Resonance curves in the shallow-water limit ($k \rightarrow 0$) for $a = 0.4$. The ellipses represent (3) with $m = \pm 1, \pm 2$, and ± 3 (solid lines: $|p| > |m|/2$; dotted lines: $|p| < |m|/2$) while the straight lines are solutions of (5) (solid lines: unstable; dashed lines: stable).

Fig. 3 Numerically obtained instability regions (encircled by solid lines) for $k = 0.05$ and $a = 0.4$. The dashed lines represent resonance curves in the shallow-water limit $k \rightarrow 0$.