11409 有限要素法によるチャンネル乱流の LES 解析

LES analysis of Channel flow Using Finite element Method

正 三浦 慎一郎 (都立産技高専)

Shinichiro MIURA, Tokyo Metropolitan College of Technolog, 1-10-40 Higashi-ohi, Shinagawa-ku, Tokyo.

Key Words : channel turbulent flow, finite element method, multi-pass algorithm

1. はじめに

乱流計算のベンチマーク問題の一つとして知られている平行平板間の乱流 (チャンネル乱流) 問題は、単純な形状であり周期境界条件の設定によりスペクトル法を基本とする直接シミュレーション (DNS) による計算も可能である。したがって、乱流モデルの検証や数値計算法の妥当性の検証問題として広く用いられている。特に差分法の分野では、格子の配置や差分近似精度で多く検討されており^[1]、近似解の精度の向上が見られている。

一方、有限要素法を用いた計算においても、これまで計算負荷などの問題から困難な場合が多かったが、近年のコンピュータの発達により乱流計算において積極的に用いられるようになってきた。しかしその計算例は差分法に比べて圧倒的に少なく、差分法との比較においても、その精度の優位性は必ずしも示されていないと思われる。

そこで本研究では、DNS や差分法で計算される低レイノルズ数領域における乱流場での有限要素計算を行い、DNS データベースとの比較を通じて乱流統計量の予測に関して検討する。また、有限要素スキームとして、時間積分法に関しては差分法で良く用いられている 2 次精度 Adams-Bashforth 法と、壁方向の粘性項に関しては陰解法である Crank-Nicolson 法により、さらに空間に関しては、差分法における中心差分に相当する Galerkin 有限要素法を用いる。また、対流項に関して保存型で扱うことや、有限要素法でよく用いられる質量行列の集中化に関して改善を与える点に特徴を有する。

本計算では、壁面摩擦速度に基づく Reynolds 数 180 により、乱流統計量の検証を行う。

2. LES 基礎方程式及び、有限要素スキーム

基礎方程式は非圧縮性粘性流体を仮定した Navier-Stokes 方程式と連続の方程式に対し、壁面摩擦速度 u_τ 及び平板間の半値で代表速度及び代表長さをとるものとし、さらに空間フィルタを仮定したフィルタリングを行う。フィルタ操作を Navier-Stokes 方程式に適用することにより、以下のフィルタリングされた方程式を得る。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$ であり、 τ_{ij} は Smagorinsky モデルによりモデル化され、Van Driest 型の壁面減衰関数を併用する。 f_i は外力項であり、本計算の場合は圧力勾配が一定になるような条件を与える。

運動方程式 (1) と連続の方程式 (2) の計算のアルゴリズムに分離解法の一つである fractional step 法を用いる。空間に関する離散化は、一般的なガラーキン有限要素法により定式化し、時間積分法として、対流項及び拡散項に 2 次精度 Adams-Bashforth 法を適用した場合の有限要素方程式は以下になる。

$$M_{\alpha\beta} \frac{\bar{u}_{i\beta}^* - \bar{u}_{i\beta}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (3f_{i\alpha}^n - f_{i\alpha}^{n-1}) \quad (3)$$

ただし、

$$f_{i\alpha}^n = K_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_{j\gamma}^n \bar{u}_{i\beta}^n - \left(\nu_t^n + \frac{1}{Re_\tau} \right) D_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^n - F_{i\alpha}^n \quad (4)$$

ここで $K_{\alpha\beta\gamma}$ は対流項であり発散型で離散化している。 $D_{\alpha\beta}$ は拡散項の係数行列を表し、各要素領域 (Ω_e) 及びその境界領域 (Γ_e) での係数行列は以下になる。

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} N_\beta N_\gamma d\Omega, \quad (5)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} d\Omega, \quad (6)$$

$$F_{i\alpha} = \int_{\Gamma_e} N_\alpha \bar{u}_i \bar{u}_j n_j d\Gamma \quad (7)$$

ここで、 N_α は補間関数であり、 n_j は x_j 方向の単位法線ベクトルである。

一方、壁方向の運動方程式に関しては陰解法を用いる。物理粘性項に 2 次精度 Crank-Nicolson 法、対流項及び渦粘性による拡散項を 2 次精度 Adams-Bashforth 法を適用した場合の有限要素方程式は、以下のように 2 段階で計算する。

$$M_{\alpha\beta} \frac{\bar{u}_{i\beta}^* - \bar{u}_{i\beta}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (3g_{i\alpha}^n - g_{i\alpha}^{n-1}) \quad (8)$$

$$M_{\alpha\beta} \frac{\bar{u}_{i\beta}^{**} - \bar{u}_{i\beta}^*}{\Delta t} = \frac{1}{2Re} D_{\alpha\beta} (\bar{u}_{i\beta}^{**} + \bar{u}_{i\beta}^*) \quad (9)$$

ただし、

$$g_{i\alpha}^n = K_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_{j\gamma}^n \bar{u}_{i\beta}^n - \nu_t^n D_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^n - F_{i\alpha}^n \quad (10)$$

以上の有限要素方程式を全体系に重ね合わせて解く。その他、圧力に関する Poisson 方程式に対しても Galerkin 有限要素法を用いる。また補間関数は流速、圧力共に 8 節点双 1 次補間関数を用いる。Crank-Nicolson 法を適用した場合の陰解法部分には対角スケーリング付き共役勾配法 (CG 法)、圧力ポアソン方程式に関する連立方程式の解法には対角スケーリング付き共役残差法 (CR 法) を用いる。

式 (3) 及び式 (8) における質量行列については、集中化質量行列 ($\bar{M}_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} M_{\alpha\beta}$) に伴う離散化誤差の低減を

図るため、本計算では、次式で示される multi-pass アルゴリズムを用いる。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} U_{i\beta}^{(k)} = h_{i\alpha}^n + (M_{\alpha\beta} - \bar{M}_{\alpha\beta}) U_{i\beta}^{(k-1)} \quad (11)$$

ただし、 $U_{i\beta}^{(k)} = u_{i\beta}^* - u_{i\beta}^n$ であり、 $k=1$ で集中化質量行列を用いた場合に一致する。本計算では $k=3$ を用いる。

3. 計算条件及び計算結果

本計算で用いる要素分割及び、壁座標系における要素幅を表 1 に示す。主流方向を x_1 、垂直方向を x_2 、スパン方向を x_3 とし、その長さは domain1 として $4\pi\delta$, 2δ , 4δ ,

domain2 として, $2\pi\delta$, 2δ , $\pi\delta$ を考える. 低レイノルズ数での乱流場では渦構造が大きくなるため, 計算領域を大きく取る必要がある. $Re_\tau = 180$ において DNS 計算 [2] では domain1 が使われているが, domain2 においても精度の良い計算が行われている例があるため, 2つの領域を用いる. さらに, domain2 では $32 \times 64 \times 32$ の coarse mesh と, $64 \times 64 \times 64$ の fine mesh を用いて計算を行う. 主流方向及びスパン方向には周期境界条件を課す. 要素分割方法は垂直方向成分には tanh 関数よりなる不等長要素とし, 他の方向には等分割する. 上下壁面の条件はすべり無し条件を与える. 乱流統計量に関しては充分発達した乱流場から時間及び空間のアンサンブル平均から求める. それらのデータを Kim ら [2] の DNS データと比較する.

Table1 Finite Element Mesh

domain	Δx_1^+	Δx_2^+	Δx_3^+
domain1	70.7	1.0 - 11.2	22.5
domain2(coarse mesh)	35.3	1.0 - 11.2	17.7
domain2(fine mesh)	17.7	1.0 - 11.2	8.8
DNS(kim, et.al.) [2]	11.8	4.4(max.)	7.1

Fig. 1: Mean velocity distributions for $Re_\tau = 180$

Fig. 2: Rms of velocity fluctuations of u_{1rms}^+

図1に主流流速の結果を比較する. 壁法則に従う $y^+ = u^+$ の領域から, 粘性低層及び対数領域に至るまで, DNS の計算と良く一致していることが分かる. domain2 における fine mesh を用いた場合, 若干流量が増大している. このことからメッシュの依存性が粗密の関係において, 単純はないことが分かる.

Fig. 3: Rms of velocity fluctuations of u_{2rms}^+

Fig. 4: Rms of velocity fluctuations of u_{3rms}^+

図2～図4に各流れ方向の乱流強度 (乱れ強度) 分布の比較を示す. 図2は主流方向の乱れ強度を示す. 粗い格子を用いた場合, 差分法を用いた計算では主流方向の乱れ強度が DNS に比べて増大する. このことが本計算結果でも見られ, fine mesh を用いた場合, DNS の結果に収束していることが良く分かる. 図3, 図4においても同様であり, domain1 及び, domain2 における粗いメッシュを用いた場合に比べて, fine mesh では大きく改善されていることがわかる.

4. まとめ

本研究では, チャネル乱流計算を行うために LES に基づく乱流モデルの導入と, 有限要素法を用いた離散化を行った.

その結果, スペクトル法による DNS データを比較から, 流速成分に関しては非常に良好な一致が見られた. 乱れ成分に関しては, 要素幅に関しての差異が見られた.

今後の予定として, 高レイノルズ数での DNS データとの比較を行う予定である.

謝辞

本研究におけるベクトル並列計算機の利用は, 東北大学情報シナジーセンターにおける平成18年度共同研究により行われた. また本研究で使われた計算機の一部は, スーパーコンピュータ NEC SX-7 を用いた.

参考文献

- (1) 森西ら, 壁乱流の LES における差分精度と格子解像度の影響, 機論, **66**-647, 1750-1757, 2000-7.
- (2) Moin, P. and Kim, J., Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, **118**, 341-377, 1982.