10305 Hermite 型三角形高精度要素の X-FEM への適用

Application of Hermitian Type 3-node Triangular Element to X-FEM

○ 菊池 聡 (茨城大院) 正 関東 康祐 (茨城大)
小澤 大輔 (茨城大)

Satoshi KIKUCHI, Ibaraki University, 4-12-1, Naka-Narusawa, Hitachi, Ibaraki

Yasuhiro KANTO, Ibaraki University

Daisuke OZAWA, Ibaraki University

Recently, several Meshfree methods have been developed. Especially, many researchers are focused on extend finite element method(X-FEM) that enables to evaluate stress intensity factors and solve crack growth problems efficiently in the area of fracture mechanics. This paper describes formulation of Hermitian Type 3-node Triangular Element. Then, apply Hermitian Type 3-node Triangular Element to X-FEM. Specifically, we considered to obtain appropriate solutions for two dimension elastic problems.

Key word: FEM, X-FEM, Hermitian Type, Triangular Element

1 緒言

拡張有限要素法 (X-FEM) は構造物にある不連続面や亀裂先端の特異場を、亀裂まわりの節点に新しい自由度を付加し、それに対応した形状関数を用いることで表現する。これにより、要素分割形状と亀裂形状を分けて定義することが可能となり、FEMよりも効率的に応力解析が可能となる。特に、破壊力学分野で扱われる応力解析では、有限要素法の場合に二重節点の追加やリメッシュ処理などが必要になるのに対して、それらの処理が必要ないことから効率的な解析を行うことが可能とされる。

一方で、近年、有限要素法を用いた汎用解析ソフトなどの普及により、構造物の安全性の評価が容易に行えるようになってきている。また、計算機の性能向上に伴い、解析モデルの大規模化が進んでいる。計算モデルの大規模化により、Delauny自動要素分割法などの自動要素分割が一般的となっているが、これには数学的な単純さから三角形要素や四面体要素が用いられる事が多い。しかし、これらの要素は精度が不十分であることが指摘されている。

以上のことから、内部に亀裂を有する解析モデルに対して、自動要素分割とHermite型要素を組合わせて用いることにより、効率的に高精度の解析が行えると考えられる。本研究では、2次元でのHermite型三角形要素の定式化を行い、X-FEMで亀裂解析の精度について検討を行った。

2 解析手法

2.1 Hermite補間関数

1次元2節点のHermite補間関数は、 $-1 < \xi < 1$ の範囲で2点1次のHermite多項式を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} H_{01}^{(1)}(\xi) &= (2+\xi)(1-\xi)^2/4 \\ H_{02}^{(1)}(\xi) &= (2-\xi)(1+\xi)^2/4 \\ H_{11}^{(1)}(\xi) &= (1+\xi)(1-\xi)^2/4 \\ H_{12}^{(1)}(\xi) &= -(1-\xi)(1+\xi)^2/4 \end{aligned} \quad (1)$$

上式のように、 ξ の3次式で表され各節点の自由度は、 $u, du/dx$ の2つである。これを2方向、3方向に組み合わせることにより、2次元四辺形要素、3次元6面体要素を構築出来る。

2.2 Hermite型3節点三角形要素

2次元三角形要素の1次近似による内挿関数は、次式のような面積座標で表される。

$$\begin{aligned} N_i^0(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_i \\ N_j^0(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_j \\ N_k^0(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_k \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 i, j, k は反時計周りに付けられた節点インデックス、 $\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k$ は面積座標であり、 $\zeta_i + \zeta_j + \zeta_k = 1$ である。

変数の微分に対応した内挿関数を構築するために要素内の節点に対応した斜交局所座標系を定義する。節点*i*に対応した座標系を (ξ_i, η_i) とする。ここで、 ξ_i は節点*i*から節点*j*に向かう座標であり、 η_i は節点*i*から節点*k*に向かう座標である。このとき、斜交局所座標系と面積座標との間には、 $\xi_i = \zeta_j, \eta_i = \zeta_k$ の関係がある。1次元のHermite内挿関数に準じて辺*i-j*上で(1)式の $H_{11}^{(1)}$ に相当する関数を、以下のように表す。

$$N_i(\xi_i, \eta_i) = \xi_i(1 - \xi_i - \eta_i)^2 \quad (3)$$

上式の関数の他の辺上での振る舞いを見ると、辺*i-k*上では、 $\xi_i = \zeta_j$ であるので0となり、辺*j-k*上では、 $1 - \xi_i - \eta_i = \zeta_i$ であるので、これも0となる。また、辺*i-j*上では、 $\eta_i = \zeta_k = 0$ であるので、定義域を $0 < \xi_i < 1$ に変更した(1)式の $H_{11}^{(1)}$ と一致する。すなわち、 ξ_i 方向の傾きのみが1となり、それ以外の節点値および微分値が0となる関数となる。面積座標を用いて表せば次式となる。

$$N_{i\xi}(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) = \zeta_j \zeta_i^2 \quad (4)$$

同様に、 η_i 方向微分に対する内挿関数は次式となる。

$$N_{i\eta}(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) = \zeta_k \zeta_i^2 \quad (5)$$

さらに、節点*j, k*に対してもそれぞれの節点に対する局所座標を用いた微分に関する内挿関数を定義する事が出来る。

節点値自身に対する内挿関数は、線形の内挿関数から上記で求めた微分に関する内挿関数をその傾きにに応じて差し引くことにより、求める事が出来る。これは、中間節点を有する高次要素での内挿関数の導出と同様の手法である。最終的に、すべての内挿関数は以下のように求められる。

ただし、微分はそれぞれの対応する節点における局所座標方向であり、面積座標の関数として表している。

$$\begin{aligned} N_i(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_i^2(3 - 2\zeta_i) + 2\zeta_i\zeta_j\zeta_k \\ M_{i\xi}(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_i^2\zeta_j + \zeta_i\zeta_j\zeta_k/2 \\ M_{i\eta}(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_i^2\zeta_k + \zeta_i\zeta_j\zeta_k/2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_j(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_j^2(3 - 2\zeta_j) + 2\zeta_i\zeta_j\zeta_k \\ M_{j\xi}(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_j^2\zeta_k + \zeta_i\zeta_j\zeta_k/2 \\ M_{j\eta}(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_j^2\zeta_i + \zeta_i\zeta_j\zeta_k/2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} N_k(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_k^2(3 - 2\zeta_k) + 2\zeta_i\zeta_j\zeta_k \\ M_{k\xi}(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_k^2\zeta_i + \zeta_i\zeta_j\zeta_k/2 \\ M_{k\eta}(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k) &= \zeta_k^2\zeta_j + \zeta_i\zeta_j\zeta_k/2 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\zeta_i + \zeta_j + \zeta_k = 1$ である。なお、各関数中の $\zeta_i\zeta_j\zeta_k$ の項は、線形近似が出来るために付け加えられたバブル関数(すべての節点上で形状関数の値が0となる関数)である。上式を $x-y$ 座標に変換することにより、通常の内挿関数を得る事が出来る。これらの内挿関数は、Zienkiewicz¹⁾が以前に求めた3角形板曲げ要素の内挿関数と一致する。

3 X-FEM への適用

3.1 内挿関数

亀裂近傍にある要素内の位置 x における変位場は次式を用いて近似される。

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \sum_{I=1}^m \phi_I(x) u_I + \sum_{I \in C} \phi_I(x) \sum_{k=1}^4 \gamma_k(x) a_I^k \\ &\quad + \sum_{I \in J} \phi_I(x) H(x) b_I \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 ϕ_I は通常FEMで用いられる形状関数、 m は要素を構成する節点数、 u_i 、 a_i 、 b_i は節点自由度ベクトルであり、 γ_k は亀裂先端の変位場の漸近解を表す基底関数、 $H(x)$ は亀裂近傍の不連続を表すヘビサイド関数である。 C は亀裂先端近傍の変位について、漸近解の特性を考慮する節点を集めた集合、 J は亀裂周辺の変位の不連続性を考慮する節点の集合である。亀裂先端の変位場の漸近解を表す基底関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \gamma_2 = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \gamma_3 &= \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta, \quad \gamma_4 = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 r 、 θ は亀裂先端位置を原点とする極座標系である。Eq. (10)で与えられる基底関数は均質材中の亀裂先端の変位場について用いられる。また、ヘビサイド関数は次式で表せる。

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \Omega_+) \\ -1 & (x \in \Omega_-) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 Ω_+ 、 Ω_- は亀裂線の上側領域、下側領域を表している。

3.2 剛性マトリクス

Eq. (9)は通常有限要素法と同様に次式で表せる。

$$u^h = N(x)U \quad (12)$$

ここで、 $N(x)$ は要素ごとに定義される内挿関数をマトリクス形式にまとめたものであり、 U はEq. (9)で用いられる節点自由度を $N(x)$ に対応するように並べたベクトルである。二次元FEMでの各節点の自由度は2となるが、X-FEMでは新たに自由度が付加されるためX-FEMで定義される節点属性によって節点の自由度が変わる。通常のHermite型要素では節点での自由度は6となるが、節点属性が C のときは14、節点属性が J のときは8となる。Eq. (12)であらわされる変位の近似を用いれば、通常有限要素法と同様の方法で要素剛性マトリクスを定義できる。

3.3 数値積分

Hermite型要素の積分は三角形領域の積分公式を用いることで解析的に解く事が出来る。内部に亀裂線を有するような場合には、積分領域を亀裂線を境に二つに分けることで計算が可能となる。

$$\int_0^\beta \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}(\beta-\eta)} \xi^l \eta^m dx dy = 2\Delta \alpha^{(l+1)} \beta^{(m+1)} \frac{l!m!}{(l+m+2)!} \quad (13)$$

ここで、 α 、 β は亀裂線と辺上での交点を辺の長さの比で表した相対値であり、 Δ は三角形の面積である。

Fig. 1 Analysis Flow Chart

Fig. 1に示すような手順で解析を行う。不連続形状部分の処理については、プログラム処理の単純化が可能となるレベルセット法を導入する。

4 結言

本稿では、隅節点のみを有するHermite型三角形要素の定式化を行った。また、Hermite型三角形高精度要素について、X-FEMに適用するための積分に関する部分領域での積分方法を導出した。

参考文献

- 1) O.C.Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, (1984), p.238, Baihukan Ltd.