20604 弦により拘束を受ける弓状はりの非線形振動実験

Experiments on Nonlinear Vibrations of a Bowed-Type Beam Deformed by Stretched Strings

正 永井 健一(群馬大院) 正 丸山 真一(群馬大院)

○ 塚越 俊介(群馬大院) 正 山口 誉夫(群馬大院)

Ken-ichi NAGAI, Gunma University, Tenjin-cho 1-5-1, Kiryu, Gunma 376-8515

Shinichi MARUYAMA, Gunma University

Syunsuke TSUKAGOSHI, Gunma University

Takao YAMAGUCHI, Gunma University

Experimental results are presented on nonlinear vibrations of a bowed-type beam deformed by stretched strings under periodic lateral excitations. A beam is clamped at the center and deformed to a curved configuration by stretched strings which connect both ends of the beam. Nonlinear responses of the beam are measured under periodic lateral excitation. Chaotic response of the bowed-type beam is examined by the power spectrum and the maximum Lyapunov exponent. Vibration modes which contribute to the chaos are inspected by the principal component analysis. Dominant chaotic response of the bowed-type beam is generated from the sub-harmonic resonances of 2/3 order with the lowest mode of vibration accompanied by the dynamic snap-through. From the results of the principal component analysis, it is found that the chaotic response is dominated by the lowest mode of vibration and by a symmetric mode due to the dynamic snap-through.

Key Words: Nonlinear Vibrations, Chaos, Beam, Vibration of Continuous Systems, Principal Component Analysis

1. 結言 近年、機械構造物の小型化、軽量化に伴い、薄肉はりが多用されている。薄肉はりの剛性を高める手段の一つに、弦張力により曲率を与える方法がある⁽¹⁾。弦を用いることで容易にはりに曲率を与え、剛性が得られるが、はりに非線形な復元力特性が生じるため、動的荷重の下では内部共振や動的飛び移りを伴うカオス振動が生じる可能性がある。

本実験では、両端が弦で拘束された弓状はりの非線形振動について実験を行った。まず、はりの基本特性として、線形固有振動数と振動モード、復元力特性を調べた。続いて周期横加振を与えた際の周波数応答曲線を求め、特徴的な応答を示す周波数領域において時系列波形を記録し、周波数分析、最大リャプノフ指数の計算、主成分分析を行った。

2. 実験装置および実験要領 実験に用いたはりを図1に示す。はりの中央を支持ブロックで固定し、はり両端を弦で連結する。この弦に張力を与えることにより、はりを座屈させて弓状の形状を得る。

はりには、厚さ $h=0.307\text{mm}$ 、長さ $2L=170\text{mm}$ 、幅 $b=30.1\text{mm}$ の燐青銅板(縦弾性係数 $E=110\text{GPa}$ 、密度 $\rho=8.78 \times 10^3\text{kg/m}^3$)を用いた。支持ブロックには、長さ 24.0mm 、幅 30.1mm のジュラルミン製ブロックを用いた。これより、はりは支持ブロックの両側のそれぞれ 73.0mm の部分で振動を生じる。はり先端には、アルミ材とテフロンからなる弦支持具を取り付け、平均直径 0.450mm 、縦弾性係数 $E=177\text{GPa}$ の弦を張り渡した。弦支持具のテフロン材は、弦を通すための溝を持つ円盤であり、弦との接触によって生じる摩擦を低減し、弦張力を均等にすることができる。はり軸心上の支持ブロック中心位置に原点をとり、はりの軸方向に x 軸を、横方向鉛直下向きに z 軸を設けた。

実験では、電磁式加振器によりはりに周期横方向加速度を与え、レーザ変位計によりはりの応答を計測し、分析を行った。

実験結果の整理のため次の無次元量を導入した。

$\xi = x/L$, $w = W/h$, $r = \sqrt{I/A}$, $\Omega_0 = L^2 \sqrt{EI/\rho A}$, $\omega = \Omega/\Omega_0$, $n_s = N_s(L^2/EI)$, $p_d = \rho A a_d L^4/EI r$, $q_d = Q_d L^3/EI r$, ξ は軸方向無次元座標である。 W はたわみ変位、 w その無次元量である。 r ははりの断面二次半径、 $I = bh^3/12$ ははりの断面二次モーメント、 $A = bh$ ははりの断面積である。 Ω_0 は振動数の代表量である。 Ω は加振角振動数($\Omega = 2\pi f$, f : 加振

振動数)であり、 ω は無次元加振振動数である。 n_s は弦張力 N_s の無次元量、 p_d は加振加速度振幅 a_d の無次元量、 q_d は集中荷重 Q_d の無次元量である。

3. 実験結果および検討

3.1 はりの固有振動数、振動モード はりに微小音圧を加えた際の応答を測定し、線形固有振動数と固有振動モードを求めた。固有振動数 f_i 、無次元固有振動数 ω_i 、ならびに固有振動モードの概形を表1に示す。一次固有振動モードは非対称な形状を、二次固有振動モードは対称な形状を示している。対称な固有振動モードが高次に現れるのは、はりの両端を弦で連結し曲率を与えたため、対称変形が拘束され、対称モードの剛性が上昇したためである。同様に、三次固有振動モードは非対称、四次固有振動モードは対称な形状となっている。

Fig.1 Bowed-type beam and fixture

Table1
Natural frequencies and vibration modes of the beam

Mode i	Modal pattern	f_i [Hz]	ω_i
1		19.8	2.87
2		43.5	6.31
3		161	23.3
4		175	25.4

3.2 はりの復元力特性 はり上の位置 $\xi=0.59$ に集中荷重 Q_{st} を作用させた際のはりのたわみを求めた。たわみの計測点は $\xi=0.93$ とした。結果を図2に示す。縦軸は無次元集中荷重 q_{st} 、横軸は静的平衡位置からの無次元たわみ w である。図より、はりは飛び移りを有する漸軟-漸硬形の復元力特性を有し、二つの静的安定平衡点を持つ。

3.3 周波数応答曲線 加振加速度振幅 $p_d=149(a_d=25\text{m/s}^2)$ の下で加振実験を行った。 $\xi=0.91$ における周波数応答曲線を図3に示す。縦軸は無次元たわみの実効値 w_{rms} 、横軸は無次元加振振動数 ω である。図中、記号 (i,j) は共振の種類を表し、 i は主に誘起される振動形を、 j は共振の次数を表す。加振振動数を高振動数側から低下させると、 $\omega=5.70$ 付近で一次固有振動モードの1/2次分数次調波共振応答 $(1,1/2)$ が現れる。さらに振動数を減少させると $\omega=3.63\sim 4.51$ の周波数領域で複数のカオス状応答が生じた。次に、加振周波数を低振動数側から上昇させると、 $\omega=4.15$ 付近で一次固有振動モードの2/3次分数次調波共振応答 $(1,2/3)$ が現れ、 $\omega=5.70$ 付近で一次固有振動モードの1/2次分数次調波共振応答 $(1,1/2)$ が現れる。以下では代表として、図中の記号Cで表す $\omega=3.87$ のカオス状応答について分析を行う。

3.4 時系列波形、周波数分析 加振振動数 $\omega=3.87$ におけるカオス状応答を図4に示す。図中(a)は時系列波形を示し、縦軸は $\xi=0.91$ におけるはりの無次元変位 w 、横軸は加振周期 τ_c を基準とした周期数 τ/τ_c である。(b)は周波数分析結果を示し、縦軸は振幅スペクトル A 、横軸は無次元の分析周波数 ω_{sp} である。(a)の時系列波形は、二つの安定平衡点を不規則に飛び移る波形を示している。(b)の周波数分析結果において、加振振動数 ω のほかに $(2/3)\omega$ 付近に顕著なピークがある。ピークが現れる振動数は、一次固有振動数 ω_1 に近接している。よってこのカオス状応答は、動的飛び移りを伴い、一次固有振動モードの2/3次分数次調波共振から生じている。

3.5 最大リアプノフ指数と埋め込み次元 本実験で得られたカオス状応答に対して、Wolfの方法⁽²⁾を用いて最大リアプノフ指数の計算を行った。得られた結果を図5に示す。縦軸は最大リアプノフ指数 λ_{max} 、横軸は埋め込み次元 e である。図より、埋め込み次元 $e=11\sim 12$ 付近で最大リアプノフ指数 λ_{max} が0.2程度の値に収束している。これより、振動応答に寄与する振動モードの数は5~6程度となる。 λ_{max} が正の値に収束しており、応答はカオス振動であると確定できる。

Fig.2 Characteristics of restoring force of the beam

Fig.3 Frequency response curve

3.6 主成分分析 はり上の4点 $\xi=-0.86, \xi=-0.41, \xi=0.49, \xi=0.91$ におけるたわみの時間波形を同時計測し、得られた時間波形より、Karhunen-Loeve法を用いて主成分分析⁽³⁾を行った。得られた主成分の変形パターンとその寄与率を図6に示す。縦軸は得られた固有ベクトルの成分、横軸は無次元座標である。 $\omega=3.87$ のカオス状応答には、対称な変形形状を示す主成分が52.4%、それに続いて一次固有振動モードに対応する主成分が44.8%の寄与率を占めている。このカオス状応答において、一次固有振動モードと同程度に、対称な変形パターンの寄与が大きく現れたのは、飛び移り後のはりが対称な変形形状を有するためである。

4. 結言 弦により拘束を受ける弓状はりの非線形振動について実験を行い、以下の結論が得られた。

- (1) 両端を弦で連結し曲率を与えたはりでは、対称変形が拘束され、対称な固有振動モードが高い固有振動数を有する。
- (2) 一次固有振動モードの2/3次分数次調波共振から、動的飛び移りを伴うカオス振動応答が発生した。
- (3) 主成分分析の結果、上記カオス振動応答には、一次固有振動モードに対応する非対称モードが45%程度の寄与を示す。さらに動的飛び移り後の対称な変形形状に対応する変形パターンも50%程度の寄与を示す。

Fig.4 Chaotic response

Fig5. Maximum Lyapunov exponent

Fig6. Results of principal component analysis

文献

- (1) 永井, 機論, 60-569C (1994), pp.3-9.
- (2) Wolf, A.ほか三名, Physica, 16D(1985), pp.285-317.
- (3) Azeez, M.F. and Vakakis, A.F., J.Sound Vib., (2001), pp240-5.